Correction d'exercices

Exercice 1

1. a. Représenter dans un repère orthonormé d'unité 4 cm la fonction f définie sur [0 ; 1] par :

$$f(x) = x + \frac{1}{2}.$$

b. Montrer que f est une fonction de densité de probabilité sur [0 ; 1].

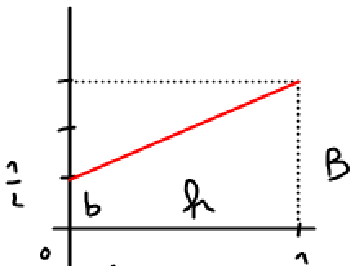
2. X est la variable aléatoire continue sur [0 ; 1] dont la loi a pour densité de probabilité la fonction f définie à la question **1**.

Calculer :

a. $P(X < 0{,}25)$ **b.** $P\left(X > \frac{1}{3}\right)$

c. $P(0{,}1 < X < 0{,}7)$ **d.** $E(X)$

1 a) f est une fonction affine. Sa représentation graphique sur $[0;1]$ est un segment de coefficient directeur 1 et d'ordonnée à l'origine $\frac{1}{2}$



b. f est continue et positive sur $[0;1]$

de plus $\int_0^1 f(x) = \underbrace{\frac{(B+b)\times h}{2}}_{\text{Aire d'un trapèze}} = \frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2} \times 1}{2} = \frac{2\times 1}{2} = 1$

donc f est une densité sur $[0;1]$

2.a) $p(X < 0{,}25) = \int_0^1 f(x)dx = \frac{f(0{,}25)+f(0)}{2} \times 0{,}25$

$= \frac{\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right)}{2} \times \frac{1}{4}$

$= \frac{5}{32}$

b) $p\left(X > \frac{1}{3}\right) = \frac{f(1) + f(1/3)}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)$

$= \frac{\frac{3}{2} + \frac{5}{6}}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$

c) $p(0{,}1 < X < 0{,}7) = \frac{f(0{,}7)+f(0{,}1)}{2} \times (0{,}7 - 0{,}1)$

$= \frac{1{,}2 + 0{,}6}{2} \times 0{,}6 = 0{,}54$

d) $E(X) = \int_0^1 x f(x)dx = \int_0^1 x^2 + \frac{x}{2}\, dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

$= \frac{7}{12}$

Exercice 2

Soit a un réel strictement positif. Soit f la fonction définie sur $[0\,;a]$ par $f(x)=2e^{-x}$.
Déterminer le réel a pour que f soit une fonction de densité de probabilité sur $[0\,;a]$.

- f est continue et positive sur $[0;a]$ par produit d'une fonction exponentielle par un réel positif.

- f est une fonction de densité sur $[0;a]$ si et seulement si $\int_0^a f(x)\,dx = 1$. Soit F une primitive de f sur $[0;a]$

$$\int_0^a f(x)\,dx = F(a)-F(0) \quad \text{avec } F(x) = -2e^{-x}$$

$$F(a) = -2e^{-a} \qquad F(0) = -2$$

$$\int_0^a f(x)\,dx = -2e^{-a}-(-2) = 2-2e^{-a}$$

$$\int_0^a f(x)\,dx = 1 \iff 2-2e^{-a} = 1$$
$$\iff 2(1-e^{-a}) = 1$$
$$\iff 1-e^{-a} = \frac{1}{2}$$
$$\iff -e^{-a} = \frac{1}{2}-1$$
$$\iff -e^{-a} = -\frac{1}{2}$$
$$\iff e^{-a} = \frac{1}{2}$$
$$\iff \ln e^{-a} = \ln\frac{1}{2}$$
$$\iff -a = -\ln 2$$
$$\iff a = \ln 2$$