## 27 Fonction de densité et fonction logarithme népérien

**a.** Montrer que la fonction $F$ telle que $F(x) = x\ln x - x$ est une primitive de la fonction $f$ définie par $f(x) = \ln x$ sur l'intervalle $[\mathrm{e}\,;\mathrm{e}^3]$.

**b.** Déterminer le nombre $k$ pour que la fonction $k \times f$ soit une fonction de densité sur l'intervalle $[\mathrm{e}\,;\mathrm{e}^3]$.

**c.** Soit X une variable aléatoire de densité $g = k \times f$

Calculer la valeur exacte de la probabilité $P(\mathrm{e} \leqslant X \leqslant \mathrm{e}^2)$.

## 27 Fonction de densité et fonction logarithme népérien

**a.** Soit $F$ la fonction définie par $F(x) = x\ln x - x$ sur l'intervalle $[\mathrm{e}\,;\ \mathrm{e}^3]$.

$$F'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x,$$

donc la fonction $F$ est une primitive de la fonction $f$ sur cet intervalle.

**b.** La fonction $f$ est continue et positive sur l'intervalle $[\mathrm{e}\,;\ \mathrm{e}^3]$. $kf \geqslant 0$ pour $k \geqslant 0$.

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} kf(x)\,\mathrm{d}x = k\,[F(e^3) - F(e)]$$

$$= k[(3e^3 - e^3) - (e - e)] = 2ke^3 = 1.$$

La fonction $g$, définie par $g(x) = \dfrac{1}{2e^3}\ln x$ est une fonction de densité sur l'intervalle $[\mathrm{e}\,;\mathrm{e}^3]$

**c.** $$P(\mathrm{e} \leqslant X \leqslant \mathrm{e}^2) = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} g(x)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2\mathrm{e}^3}\right)(F(\mathrm{e}^2) - F(\mathrm{e}))$$

$$= \left(\frac{1}{2\mathrm{e}^3}\right)(2\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^2) = \frac{1}{2\mathrm{e}}.$$

## 31 Temps d'attente

Un TGV part toutes les deux heures, entre 5 h et 24 h. Ziva doit prendre l'un de ces trains.

Elle arrive à la gare entre 8 h et 10 h. Soit X la variable aléatoire égale à l'heure d'arrivée de Ziva à la gare.

**1** On suppose que X suit une loi uniforme sur un intervalle. Préciser cet intervalle.

**2** Calculer la probabilité que Ziva attende moins de 30 minutes avant l'arrivée d'un TGV.

## 31 Temps d'attente

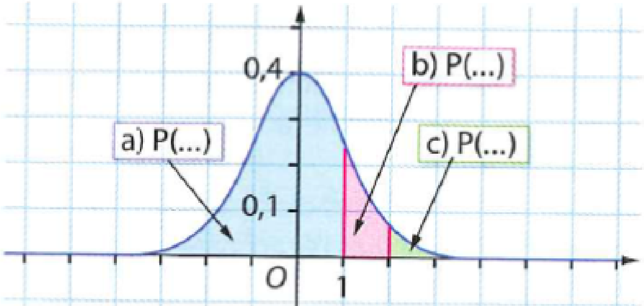
**1** La variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[8\,;\ 10]$.

**2** Les horaires de départ des TGV sont $\{5\,;7\,;9\,;11\,;13\,;15\,;17\,;19\,;21\,;23\}$. Ziva attend moins d'une demie heure lorsque $8,5 \leqslant X \leqslant 9$.

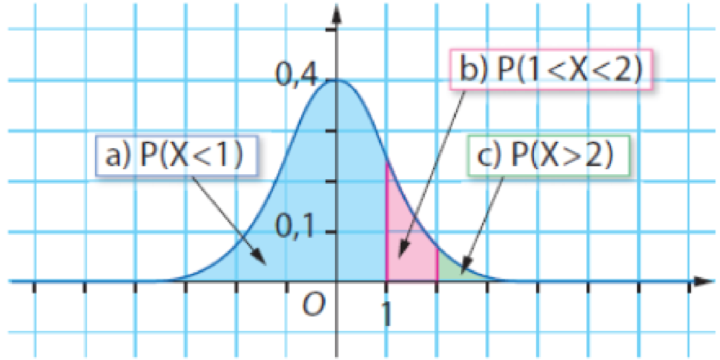
$$P(8,5 \leqslant X \leqslant 9) = \frac{9-8,5}{10-8} = \frac{0,5}{2} = \frac{1}{4}.$$

## 35 Visualiser des probabilités

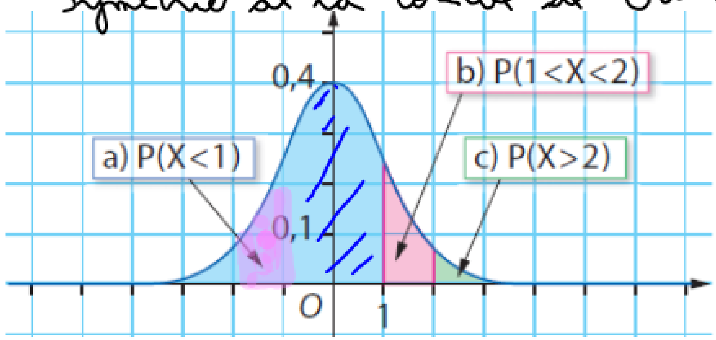
La variable X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mathbf{0}\,;\mathbf{1})$.
Compléter les étiquettes par les probabilités égales aux aires des domaines indiqués par la flèche.




## 35 Visualiser des probabilités.




Symétrie de la courbe de Gauss :




0,68

2 × + = 0,95

rappels de cours :

$P(-1 \leq X \leq 1) = 0{,}68$

$P(-2 \leq X \leq 2) = 0{,}95$

$A_{rose} = 0{,}135$ $\quad$ $A_{verte} = 0{,}025$

$A_{bleue} = 1 - (A_{rose} + A_{verte})$
$= 1 - (0{,}135 + 0{,}025)$
$= 0{,}84$

**43 Rompre la monotonie**

Un commercial effectue régulièrement un trajet allant d'une ville A à une ville B. Pour rompre la monotonie, il utilise aléatoirement des parcours différents. On admet qu'il utilise le trajet passant par la ville C dans 8 % des cas et le trajet de plus courte durée dans 40 % des cas. En 2013, ce commercial devra effectuer 50 fois le trajet.

**1.** On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois, où en 2011, ce commercial utilisera le trajet passant par la ville C.

**a)** Justifiez que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et précisez ses paramètres.

**b)** Calculez $p(X = 5)$.

**2.** On note Z la variable aléatoire qui compte le nombre de fois, où en 2013, ce commercial utilisera le trajet de plus courte durée. On décide d'approcher la loi de Z par celle d'une variable Y, qui suit une loi normale.

**a)** Justifiez que les paramètres de cette loi normale sont $m = 20$ et $\sigma = 2\sqrt{3}$.

**b)** Calculez $p(16{,}5 \leqslant Y \leqslant 23{,}5)$.
Interprétez ce résultat relativement au nombre de trajets du commercial.

1.a) On répète 50 fois de façon identique et indépendante l'expérience qui consiste à choisir un trajet avec à chaque épreuve une probabilité de succès $p = 0{,}08$ que le trajet passe par la ville C.
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.
X suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}08$. $X \sim \mathcal{B}(50; 0{,}08)$

b)

```
Binomial P.D
   P=0.16292357
```

```
binompdf(50,0.08
,5)
       .1629235749
```

2. $Z \sim \mathcal{B}(50; 0{,}4)$

$Y \sim \mathcal{N}(m; \sigma^2)$

avec $m = E(Z)$
$= 50 \times 0{,}4 = 20$

$\sigma = \sigma(Z) = \sqrt{50 \times 0{,}4 \times 0{,}6}$
$= \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3}$
$= 2\sqrt{3}$

Cours :
$X \sim \mathcal{B}(n; p)$
$E(X) = n \times p$
$V(X) = n \times p \times q$
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$
$= \sqrt{n \times p \times q}$

Remarque : $Y \sim \mathcal{N}(20; 12)$

b) A l'aide de la calculatrice

```
Normal C.D
Lower    :16.5
Upper    :23.5
σ        :3.46410161
μ        :20
Save Res:None
Execute
```


```
Normal C.D
p      =0.68767857
z:Low=-1.010363
z:Up =1.01036297
```