Chapitre 8 : FONCTIONS POLYNOMES DU SECOND DEGRE

I. Définition

Une fonction polynôme de degré 2 est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des nombres réels donnés et $a \neq 0$.

Sa représentation graphique dans un repère du plan est appelée parabole

Exemples :

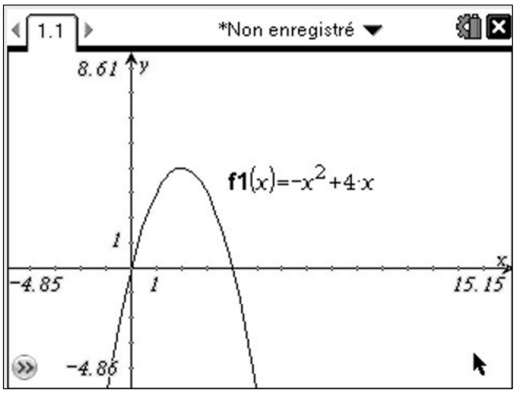
- $f(x) = 5x^2 - 4x + 9$. On a : a = 5 , b = -4 et c = 9
- $g(x) = -x^2 + 4x$. On a : a = -1 b = 4 et c = 0

- La fonction carré est une fonction polynôme particulière telle que :
  a = 1 b = 0 et c = 0

- $h(x) = (3x+1)(x-2)$ est un polynôme du second degré.

  En effet : $h(x) = 3x^2 - 6x + x - 2 = 3x^2 - 5x - 2$
  On a : a = 3 b = -5 et c = -2

On peut tracer la courbe représentative d'une fonction polynôme à l'aide de la calculatrice graphique. Il s'agit d'une **parabole**.



Le mot parabole vient du grec « parabolê » qui signifiait l'action de jeter à côté : « para » pour à côté et « bolein » pour jeter.

Application :

Exercice 1.

(A) Dans l'expression l on a un terme $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$; -2 n'est pas un nombre entier, donc l n'est pas un polynôme.

Les autres expressions sont bien des polynômes

- $f(x)$ est un polynôme du second degré
- $g(x)$ est un polynôme du second degré
- $h(x)$ est un polynôme du 1er degré

$i(x)$ est un polynôme du 2nd degré car c'est le produit de 2 facteurs du premier degré.

En effet on a $i(x) = (x-3)(x+2) = x^2+2x-3x-6 = x^2-x-6$

$i(x)$ est de la forme ax^2+bx+c avec $a=1$; $b=-1$; $c=-6$

- $j(x) = 5x-x^2-8$: c'est une expression du second degré de la forme ax^2+bx+c avec $a=-1$ $b=5$ $c=-8$

(B) $f(x) = (2x-1)(5-x) = 10x-2x^2-5+x = -2x^2+11x-5$

On a une expression de la forme ax^2+bx+c avec $\begin{cases} a=-2 \\ b=11 \\ c=-5 \end{cases}$

$g(x) = 3x(x-5)+3 = 3x^2-15x+3$

On a une expression de la forme ax^2+bx+c avec $\begin{cases} a=3 \\ b=-15 \\ c=3 \end{cases}$

$h(x) = (1-x)(3+x) = 3+x-3x-x^2 = 3-2x-x^2$

C'est une expression du second degré de la forme ax^2+bx+c avec $\begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \\ c=3 \end{cases}$

$i(x) = (2-x)^2 = 4-4x+x^2$

$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

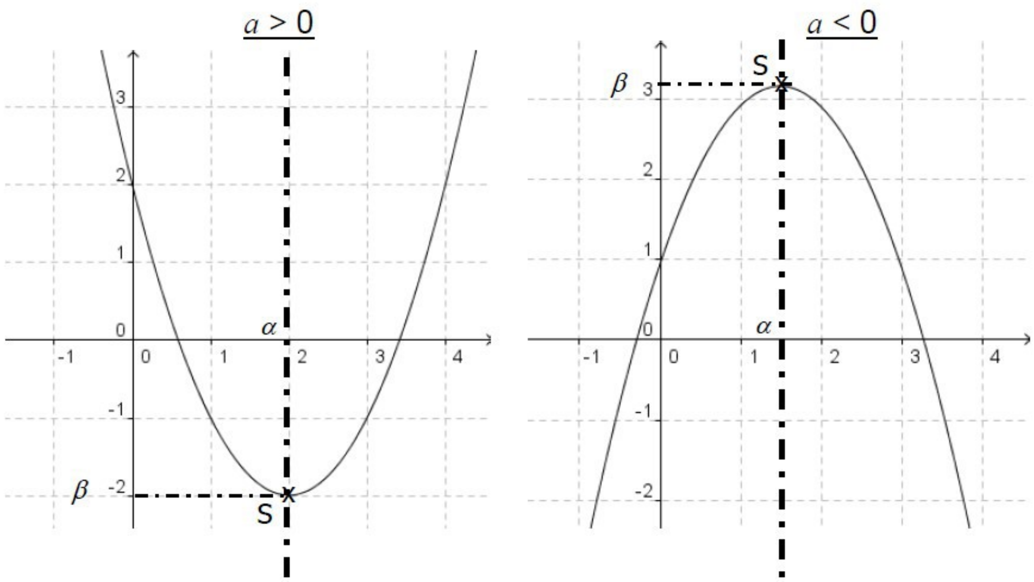
C'est une expression du second degré de la forme ax^2+bx+c avec $\begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=4 \end{cases}$

II. Variations

Propriétés :

Soit f une fonction polynôme de degré 2, telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si a est positif, la parabole est tournée vers le haut
f est d'abord décroissante puis croissante. Elle admet un minimum.
- Si a est négatif, la parabole est tournée vers le bas.
f est d'abord croissante puis décroissante. Elle admet un maximum.



III. Extremum

La courbe représentative de f est une parabole qui admet un axe de symétrie

Définition :
Le point de la courbe qui correspond au maximum ou au minimum est appelé Sommet de la parabole.

Remarque : les coordonnées du sommet sont notées $S(\alpha ; \beta)$ avec $\beta = f(\alpha)$

Exercice 4 : Parmi les expressions du second degré suivantes, de la forme ax^2+bx+c, celles dont la fonction est d'abord croissante puis décroissante sont celles dont $a<0$

$f(x)=x^2-2x+4$ $a=1$ donc $a>0$ la parabole est tournée vers le haut.

$g(x)=-x^2-7x+2$ $a=-1$ donc $a<0$ ✓

$i(x)=3x-x^2+1=-x^2+3x+1$ $a=-1$ donc $a<0$ ✓

$j(x)=-9x^2+2$ $a=-9$ donc $a<0$ ✓

$k(x)$: on développe mentalement et partiellement et on obtient

$k(x)=(x+3)(-x+2)=-x^2+\ldots$ $a=-1$; $a<0$ ✓

$l(x)=-2x(1-2x)$: même méthode

$l(x)=4x^2+\ldots$ $a=4$; $a>0$ ✗

$m(x)=(-x+1)^2$ même méthode.

$m(x)=x^2+\ldots,$ $a=1$; $a>0$ ✗