Chapitre 8 : FONCTIONS POLYNOMES DU SECOND DEGRE

I. Définition

Une fonction polynôme de degré 2 est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des nombres réels donnés et $a \neq 0$.

Sa représentation graphique dans un repère du plan est appelée parabole

Exemples :

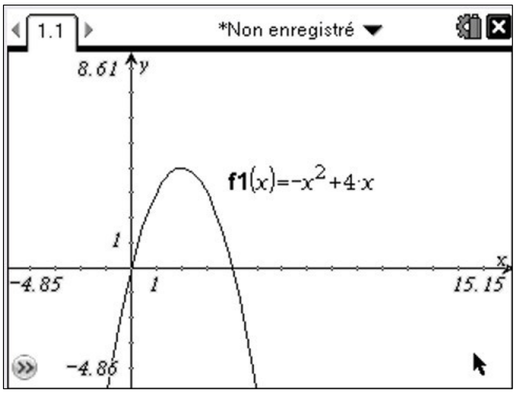
- $f(x) = 5x^2 - 4x + 9$. On a : a = 5 , b = -4 et c = 9
- $g(x) = -x^2 + 4x$. On a : a = -1 b = 4 et c = 0

- La fonction carré est une fonction polynôme particulière telle que :
  a = 1 b = 0 et c = 0

- $h(x) = (3x+1)(x-2)$ est un polynôme du second degré.

  En effet : $h(x) = 3x^2 - 6x + x - 2 = 3x^2 - 5x - 2$
  On a : a = 3 b = -5 et c = -2

On peut tracer la courbe représentative d'une fonction polynôme à l'aide de la calculatrice graphique. Il s'agit d'une **parabole**.



Le mot parabole vient du grec « parabolê » qui signifiait l'action de jeter à côté : « para » pour à côté et « bolein » pour jeter.

Application :

Exercice 1.

(A) Dans l'expression l on a un terme $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$; -2 n'est pas un nombre entier, donc l n'est pas un polynôme.

Les autres expressions sont bien des polynômes

- $f(x)$ est un polynôme du second degré
- $g(x)$ est un polynôme du second degré
- $h(x)$ est un polynôme du 1^{er} degré
- $i(x)$ est un polynôme du 2nd degré car c'est le produit de 2 facteurs du premier degré.
  En effet on a $i(x) = (x-3)(x+2) = x^2 + 2x - 3x - 6 = x^2 - x - 6$
  $i(x)$ est de la forme ax^2+bx+c avec $a=1$; $b=-1$; $c=-6$
- $j(x) = 5x - x^2 - 8$: c'est une expression du second degré de la forme ax^2+bx+c avec $a=-1$ $b=5$ $c=-8$

(B) $f(x) = (2x-1)(5-x) = 10x - 2x^2 - 5 + x = -2x^2 + 11x - 5$

On a une expression de la forme ax^2+bx+c avec $\begin{cases} a=-2 \\ b=11 \\ c=-5 \end{cases}$

$g(x) = 3x(x-5)+3 = 3x^2 - 15x + 3$

On a une expression de la forme ax^2+bx+c avec $\begin{cases} a=3 \\ b=-15 \\ c=3 \end{cases}$

$h(x) = (1-x)(3+x) = 3 + x - 3x - x^2 = 3 - 2x - x^2$

C'est une expression du second degré de la forme ax^2+bx+c avec $\begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \\ c=3 \end{cases}$

$i(x) = (2-x)^2 = 4 - 4x + x^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

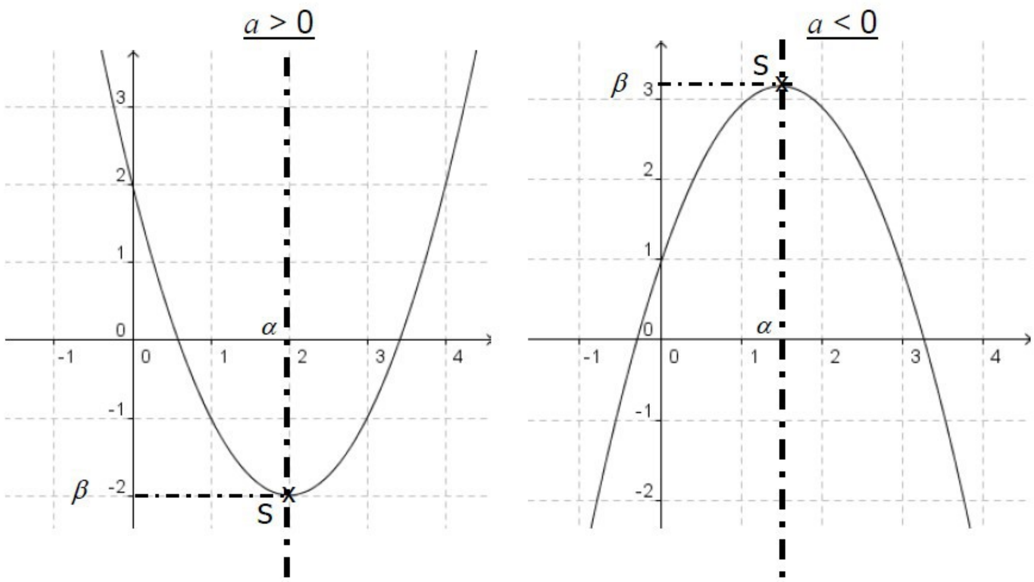
C'est une expression du second degré de la forme ax^2+bx+c avec $\begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=4 \end{cases}$

II. Variations

Propriétés :

Soit f une fonction polynôme de degré 2, telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si a est positif, la parabole est tournée vers le haut
f est d'abord décroissante puis croissante. Elle admet un minimum.
- Si a est négatif, la parabole est tournée vers le bas.
f est d'abord croissante puis décroissante. Elle admet un maximum.



III. Extremum

La courbe représentative de f est une parabole qui admet un axe de symétrie

Définition :
Le point de la courbe qui correspond au maximum ou au minimum est appelé sommet de la parabole.
Remarque : les coordonnées du sommet sont notées $S(\alpha;\beta)$ avec $\beta = f(\alpha)$

Exercice 4 : Parmi les expressions du second degré suivantes, de la forme ax^2+bx+c, celles dont la fonction est d'abord croissante puis décroissante sont celles dont $a<0$

$f(x)=x^2-2x+4$ $a=1$ donc $a>0$ la parabole est tournée vers le haut.

$g(x)=-x^2-7x+2$ $a=-1$ donc $a<0$ ✓

$i(x)=3x-x^2+1=-x^2+3x+1$ $a=-1$ donc $a<0$ ✓

$j(x)=-9x^2+2$ $a=-9$ donc $a<0$ ✓

$k(x)$: on développe mentalement et partiellement et on obtient

$k(x)=(x+3)(-x+2)=-x^2+\dots$ $a=-1$; $a<0$ ✓

$l(x)=-2x(1-2x)$: même méthode

$l(x)=4x^2+\dots$ $a=4$; $a>0$ ✗

$m(x)=(-x+1)^2$ même méthode.

$m(x)=x^2+\dots$, $a=1$; $a>0$ ✗

Exemple :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^2+4x$ admet un maximum.

En effet : Le coefficient devant x^2 est négatif donc la parabole représentative de f est tournée vers le bas. f est d'abord croissante puis décroissante. Elle admet donc un maximum.

Propriété :

- Soit f une fonction polynôme de degré 2, telle que $f(x)=ax^2+bx+c$.

  Alors f admet un extremum pour $x = -\dfrac{b}{2a}$

- Les coordonnées du sommet de la parabole sont (α ; β) avec :

  $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$

- $f(x)$ peut également s'écrire sous la forme $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$

  c'est la forme canonique de $f(x)$

Méthode : Déterminer les coordonnées de l'extremum d'une fonction polynôme de degré 2

Vidéo https://youtu.be/KgsQl1ksdbA

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2-12x+23$.

a) Quelle est la nature de l'extremum de la fonction f ?
b) Déterminer les coordonnées de cet extremum.
c) En déduire la forme canonique de $f(x)$.
d) Construire le tableau de variations de f, puis vérifier en traçant sa courbe représentative à l'aide de la calculatrice.

Forme canonique : démonstration

$$a(x-\alpha)^2+\beta = a(x^2-2\alpha x+\alpha^2)+\beta = ax^2-2a\alpha x+a\alpha^2+\beta \quad \text{avec} \begin{cases} \alpha = -\dfrac{b}{2a} \\ \beta = f(\alpha) \end{cases}$$

$$= ax^2 - 2\cancel{a}\times\left(\frac{-b}{2\cancel{a}}\right)x + a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + \underbrace{a\alpha^2+b\alpha+c}_{f(\alpha)}$$

$$= ax^2+bx+a\times\frac{b^2}{4a^2}+a\times\left(\frac{-b}{2a}\right)^2+b\times\left(-\frac{b}{2a}\right)+c$$

$$= ax^2+bx+\underbrace{\frac{ab^2}{4a^2}+\frac{ab^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}}_{=0}+c$$

$$= ax^2+bx+c$$

$$= f(x)$$

Sens de variation : démonstration

Cas où $a>0$ — Cas où $a<0$

Démontrons que f est croissante sur $[\alpha;+\infty[$

Soient x_1 et x_2 2 réels de $[\alpha;+\infty[$ avec $x_1<x_2$

Comparons $f(x_1)$ et $f(x_2)$ pour savoir si f conserve l'ordre ou non sur $[\alpha;+\infty[$

on a $\alpha < x_1 < x_2$

donc $\alpha-\alpha < x_1-\alpha < x_2-\alpha$

$0 < x_1-\alpha < x_2-\alpha$.

$x_1-\alpha$ et $x_2-\alpha$ sont 2 réels positifs

or la fonction carré est croissante sur $[0;+\infty[$

donc : $(x_1-\alpha)<(x_2-\alpha)$

$\Rightarrow (x_1-\alpha)^2<(x_2-\alpha)^2$

Multiplions par $a>0$:

alors : $a(x_1-\alpha)^2<a(x_2-\alpha)^2$

Enfin : $a(x_1-\alpha)^2+\beta<a(x_2-\alpha)^2+\beta$

$f(x_1)<f(x_2)$: f conserve l'ordre sur $[\alpha;+\infty[$

Exercice méthode : Déterminer les coordonnées de l'extremum d'une fonction polynôme de degré 2.

$f(x) = 2x^2 - 12x + 23$

a) Nature de l'extremum ; s'agit-il d'un minimum ou d'un maximum ?
$f(x)$ est de la forme ax^2+bx+c avec $a=2$, $a>0$ donc la parabole représentative de f est tournée vers le haut. f est donc d'abord décroissante puis croissante : elle présente un minimum.

b) Le minimum est atteint en $x=\alpha$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ $\quad a=2 ; b=-12$

$\alpha = \dfrac{12}{4} = 3$;

Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ vaut $\beta = f(\alpha) = f(3)$

$\beta = 2\times(3)^2 - 12\times(3) + 23 = 5$

Le sommet de la parabole a pour coordonnées $S(3 ; 5)$

c) Forme canonique : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ $\quad$ avec $\begin{cases} a = 2 \\ \alpha = 3 \\ \beta = 5 \end{cases}$

$f(x) = 2(x-3)^2 + 5$

Résoudre $f(x) = 7$.

Méthode : quelle expression choisir ?

Expression 1 : forme développée $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$

Expression 2 : forme canonique $f(x) = 2(x-3)^2 + 5$

- Avec l'expression 1

$f(x) = 7$

$\iff 2x^2 - 12x + 23 = 7$

$\iff 2x^2 - 12x + 23 - 7 = 0$

$\iff 2x^2 - 12x + 16 = 0$

$\iff \underbrace{x^2 - 6x + 8}_{g(x)} = 0$ $\quad a=1 \quad b=-6$

$\alpha = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{6}{2} = 3$

- Avec l'expression 2

$f(x) = 7$

$\iff 2(x-3)^2 + 5 = 7$

$\iff 2(x-3)^2 = 7 - 5$

$\iff 2(x-3)^2 = 2$

$\iff (x-3)^2 = 1$ $\quad \iff x-3=1$ ou $x-3=-1$

$\iff x=4$ ou $x=2$

$\beta = g(\alpha) = g(3)$

$g(3) = 3^2 - 6 \times 3 + 8$

$= -1$

$\Leftrightarrow \quad (x-3)^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x-3)^2 = 1$

d) Tableau de variation de f.

x	$-\infty$	$\alpha = 3$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$\beta = 5$	↗ $+\infty$