Chapitre 11 : Lois à densité

Remarque: dans tout ce qui suit, les repères sont supposés orthogonaux.

I Loi à densité sur un intervalle

1. Variable aléatoire continue

Définition 1

Une variable aléatoire définie sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire est dite **continue** lorsqu'elle peut prendre comme valeurs tous les nombres réels d'un intervalle I.

Exemple

Jean attend son bus. Il est certain que son bus arrivera dans moins de 10 minutes. Soit X son temps d'attente (en minutes).

La variable aléatoire X est continue car elle peut prendre comme valeurs **tous** les nombres réels de l'intervalle [0;10[.

Par exemple, X=1,3 signifie que le bus arrive au bout de 1 minute et 18 secondes (car $0{,}3\times60=18$).

2. Fonction de densité sur un intervalle [a ;b]

Définition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle [a ;b].

f est une **densité** si et seulement si

- f est continue sur [a ;b].
- f est positive sur [a ;b].
- l'aire de la partie du plan délimitée par les droites verticales $x = a$; $x = b$; $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses vaut 1, autrement dit : $\int_a^b f(x)dx = 1$.

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x) = 0{,}003x^2$ sur [0;10].
Montrer que f est une densité.

Corrigé

La fonction f est dérivable, et par là, f est **continue**.
De plus, la fonction f est **positive** (c'est le produit d'un nombre positif par un carré).
Par conséquent, f étant positive et continue, l'aire située entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses vaut:

$$\mathscr{A}=\int_0^{10} f(x)dx$$

Or: $\displaystyle\int_0^{10} f(x)dx=\int_0^{10} 0{,}003x^2dx=\left[0{,}003\frac{x^3}{3}\right]_0^{10} = 0{,}003\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{10} = \frac{0{,}003}{3}(10^3-0^3)=1$

Donc: **$\mathscr{A}$=1**
Finalement, les trois conditions suffisantes sont vérifiées, et par là, f est bien une **densité**.

Application : déclic page 214, exercices n°19 et 20

3. Loi de probabilité d'une variable aléatoire continue

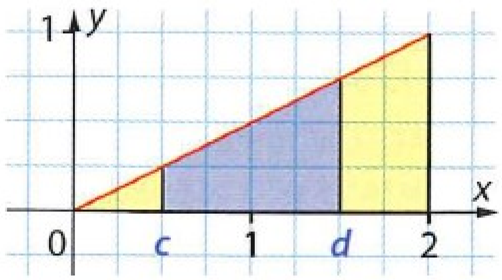
a. Définition 3

Soit X une variable aléatoire continue à valeurs dans l'intervalle I=[a ;b].

X* suit la loi de densité *f si :

pour tout intervalle J=[c ;d] inclus dans I, $p(X\in J)$ est l'aire du domaine $\mathscr{D}$,
où $\mathscr{D}$ est le domaine situé entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses pour x dans J.

$$p(x\in[c;d])=p(c\le X\le d)=\int_c^d f(x)dx$$



b. Propriété 1

Soit X une variable aléatoire continue de densité f à valeurs dans l'intervalle I.

Pour tous réels a et b de I avec $a\le b$, on a: $p(a\le X\le b)=\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

Remarques:

- ✓ $p(X=a)=0$
- ✓ $p(a\le X\le b)=p(a<X\le b)=p(a\le X<b)=p(a<X<b)$

On prolonge souvent f à $\mathbb{R}$ tout entier en la supposant nulle ailleurs qu'en I.

Exemple

Chaque jour, Jean prend le bus pour se rendre au lycée.
Il a constaté que son temps d'attente X (en minutes) suit une loi de densité f définie par :
$f(x)=0{,}003x^2$ sur [0;10].
Jean arrive à l'arrêt de bus.
1. Quelle est la probabilité qu'il attende moins de 7 minutes.
2. Quelle est la probabilité que son temps d'attente soit compris entre 7 et 9 minutes.

Corrigé

1. La probabilité cherché est: $p(\ 0 \leq X \leq 7\ ) = \int_0^7 f(x)dx = \int_0^7 0{,}003x^2 dx = \left[0{,}003\frac{x^3}{3}\right]_0^7 =$

$$0{,}003\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^7 = \frac{0{,}003}{3}(7^3 - 0^3) = 0{,}343$$

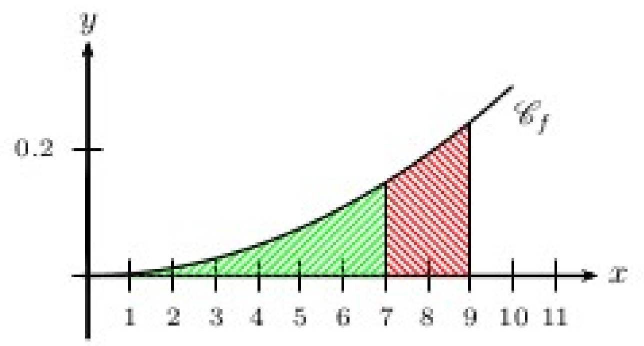
Soit: $p(\ 0 \leq X \leq 7\ ) = 0{,}343$.

2. La probabilité cherché est: $p(\ 7 \leq \mathrm{X} \leq 9\ ) = \int_7^9 f(x)dx = \int_7^9 0{,}003x^2 dx = \left[0{,}003\frac{x^3}{3}\right]_7^9 =$

$$0{,}003\left[\frac{x^3}{3}\right]_7^9 = \frac{0{,}003}{3}(9^3 - 7^3) = 0{,}386$$

Soit: $p(\ 7 \leq \mathrm{X} \leq 9\ ) = 0{,}386$.

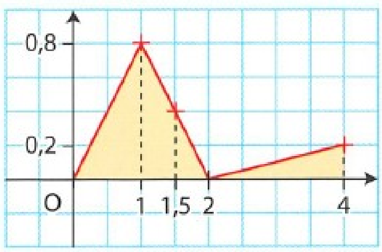
La densité f est représentée ci-dessous.
Les aires des parties hachurées (en unités d'aires) correspondent aux probabilités cherchées.



Application :

Énoncé

1. f est la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 4] par la courbe ci-contre.
Vérifier que l'aire, en unités d'aire, du domaine coloré est égale à 1.
2. X est une variable aléatoire continue à valeurs dans l'intervalle [0 ; 4] dont la loi de probabilité a pour densité la fonction f précédente. Calculer :
a) $P(1 \leqslant X \leqslant 2)$ **b)** $P(X < 1)$ **c)** $P_{(1 \leqslant X \leqslant 2)}(1{,}5 \leqslant X \leqslant 2{,}5)$



Solution

1. En unités d'aire, l'aire du triangle isocèle est $\frac{2\times 0,8}{2}$ c'est-à-dire 0,8.

L'aire du triangle rectangle est $\frac{2\times 0,2}{2}$ c'est-à-dire 0,2.

Donc l'aire du domaine coloré est 0,8 + 0,2 = 1.

2. a) $P(1 \leqslant X \leqslant 2) = \int_1^2 f(t)\,dt = \frac{1\times 0,8}{2} = 0,4$.

b) $P(X < 1) = P(0 \leqslant X \leqslant 1) = \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1\times 0,8}{2} = 0,4$.

c) $P_{(1\leqslant X\leqslant 2)}(1,5 \leqslant X \leqslant 2,5) = \frac{P((1\leqslant X\leqslant 2)\cap(1,5\leqslant X\leqslant 2,5))}{P(1\leqslant X\leqslant 2)}$.

Or $(1 \leqslant X \leqslant 2) \cap (1,5 \leqslant X \leqslant 2,5) = (1,5 \leqslant X \leqslant 2)$.

Donc $P_{(1\leqslant X\leqslant 2)}(1,5 \leqslant X \leqslant 2,5) = \frac{P(1,5\leqslant X\leqslant 2)}{0,4}$.

$$P_{(1\leqslant X\leqslant 2)}(1,5 \leqslant X \leqslant 2,5) = \frac{\frac{0,4\times 0,5}{2}}{0,4} = 0,25.$$

Méthode

La fonction f est continue et positive sur l'intervalle $[0;4]$ et son intégrale sur cet intervalle est égale à 1.
Cela justifie que l'on puisse l'utiliser comme densité de probabilité d'une variable aléatoire continue à valeurs dans $[0;4]$.

$P(1 \leqslant X \leqslant 2)$ est l'aire du domaine $\{M(x;y); 1 \leqslant x \leqslant 2$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$. Ce domaine est un triangle rectangle d'aire $\frac{1\times 0,8}{2}$.

3. Espérance

Définition 4

L' **espérance** d'une variable aléatoire continue X à valeurs dans l'intervalle $[a;b]$ et de densité f est définie par l'égalité $E(X)= \int_a^b x\,f(x)dx$.

Exemple

Reprenez l'énoncé de l'exemple précédent et déterminez l'espérance de X.
Interprétez concrètement le nombre trouvé.

Corrigé

$$E(X)= \int_0^{10} x\,f(x)dx = \int_0^{10} x\times 0,003x^2dx = \left[0,003\frac{x^4}{4}\right]_0^{10} = 0,003\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{10} = \frac{0,003}{4}(10^4-0^4) ==7,5.$$

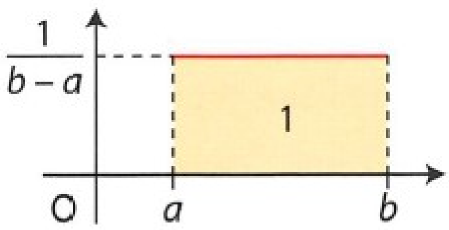
Sur un très grand nombre de jours, le temps d'attente moyen de Jean tend certainement vers 7 minutes et 30 secondes.

II. Loi uniforme

1. Définition 5

Soit a et b deux réels avec $a<b$.
La variable aléatoire continue X suit une **loi uniforme** sur l'intervalle $[a;b]$ si elle admet une densité f définie sur $\mathbb{R}$ par:

- $f(x) = \frac{1}{b-a}$ si $x \in [a;b]$
- $f(x) = 0$ si $x \notin [a;b]$

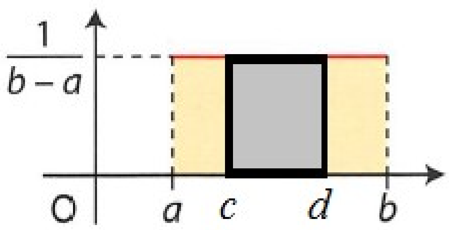


2. Propriété 2

Soit X une variable aléatoire continue suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$.

Pour tout intervalle $[c;d]$ inclus dans $[a;b]$ on a : $p(X \in [c;d]) = \dfrac{d-c}{b-a}$

Preuve : $p(X \in [c;d])$ correspond à l'aire du rectangle de largeur $d-c$ et de hauteur $\dfrac{1}{b-a}$



__**Application :**__

Énoncé

Gaëlle doit passer voir Leslie à un moment quelconque entre 18 h 30 et 20 h 45.

1. Quelle est la probabilité qu'elle arrive :

a) entre 19 h et 19 h 30 ? **b)** avant 19 h 30 ? **c)** exactement à 19 h 15 ?

2. On sait qu'elle est arrivée avant 19 h 30. Quelle est la probabilité qu'elle soit arrivée après 19 h ?

Solution

1. On note X la variable aléatoire qui donne l'heure d'arrivée de Gaëlle chez Leslie. X suit la loi uniforme sur [18,5 ; 20,75].

a) $P(19 \leqslant X \leqslant 19{,}5) = \dfrac{19{,}5-19}{20{,}75-18{,}5} = \dfrac{2}{9}$.

b) $P(X \leqslant 19{,}5) = P(18{,}5 \leqslant X \leqslant 19{,}5) = \dfrac{19{,}5-18{,}5}{20{,}75-18{,}5} = \dfrac{4}{9}$.

c) $P(X = 19{,}25) = 0$.

2. $P_{(X\leqslant 19{,}5)}(X \geqslant 19) = \dfrac{P((X\leqslant 19{,}5)\cap(X\geqslant 19))}{P(X\leqslant 19{,}5)}$.

Donc $P_{(X\leqslant 19{,}5)}(X \geqslant 19) = \dfrac{P(19\leqslant X\leqslant 19{,}5)}{P(X\leqslant 19{,}5)} = \dfrac{\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}} = 0{,}5$.

Méthode

- Pour tous nombres réels c et d dans l'intervalle [18,5 ; 20,75] : $P(c \leqslant X \leqslant d) = \dfrac{d-c}{20{,}75-18{,}5}$.
- La variable aléatoire X prend ses valeurs dans l'intervalle [18,5 ; 20,75]. Par conséquent l'événement $(X \leqslant 19{,}5)$ est égal à l'événement $(18{,}5 \leqslant X \leqslant 19{,}5)$.
- On applique la **propriété** (1)

3. Espérance

Propriété 3

L' **espérance** d'une variable aléatoire **uniforme** X à valeurs dans l'intervalle $[a;b]$ est définie par l'égalité $E(X)= \dfrac{a+b}{2}$

Preuve :

$$E(X) = \int_a^b xf(x)dx = \int_a^b x\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{2(b-a)}\left[x^2\right]_a^b$$

$$E(X) = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

Exemple :

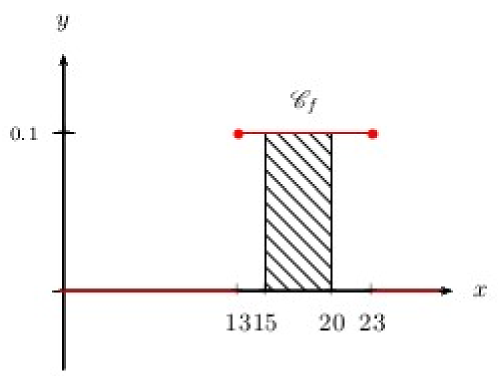
On choisit au hasard un réel de l'intervalle [13;23].

1. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui donne la valeur du nombre choisi?
2. Quelle est la probabilité que ce nombre soit entre 15 et 20?
3. Représenter f et faire apparaître sur le dessin la valeur trouvée au 2.
4. Sur un très grand nombre d'expériences, vers quel réel tend, en moyenne, la valeur du nombre choisi ?

Corrigé :

1. X suit une loi uniforme sur [13;23], de densité $f(x) = \dfrac{1}{23-13} = 0,1$
2. La probabilité cherché est: p(15≤X≤20)= $\dfrac{20-15}{23-10} = 0,5$
3. *f* est représentée ci-contre.

   La probabilité trouvée au 2. est l'aire (en unités d'aires) du rectangle hachuré de côtés 5 et 0,1.



4. Sur un très grand nombre d'expériences, la valeur moyenne du nombre choisi tend vers $E(x)$, c'est à dire vers $\dfrac{13+23}{2} = 18$