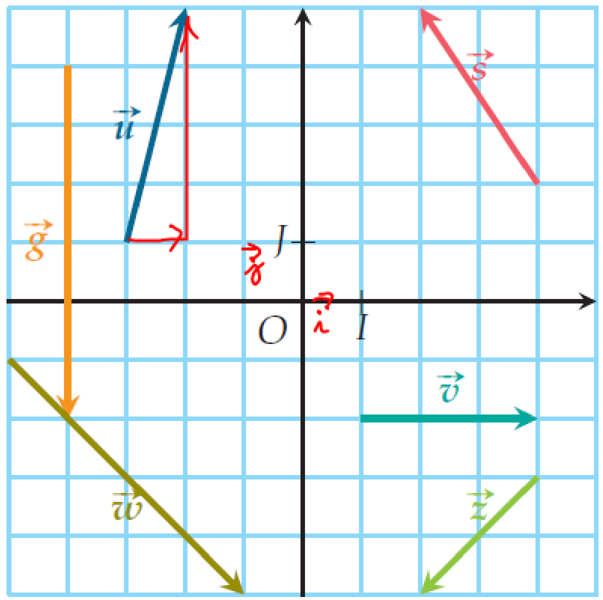
# Activité d'approche

Lire les coordonnées des vecteurs. dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$

1) $\vec{u}$ 3) $\vec{w}$ 5) $\vec{z}$

2) $\vec{v}$ 4) $\vec{s}$ 6) $\vec{g}$




$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ $\vec{g}\begin{pmatrix}0\\-6\end{pmatrix}$

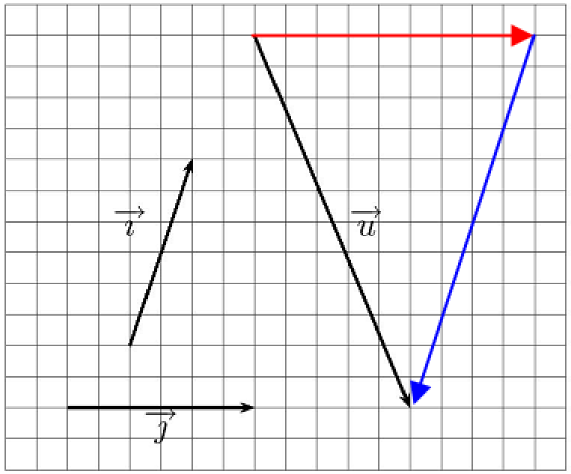
$\vec{v}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ $\vec{s}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$

$\vec{w}\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$

$\vec{z}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$

# Ch 09 Repérage dans le plan

## 1 Base ; coordonnées d'un vecteur




Soient $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ deux vecteurs **non colinéaires** du plan. Tout vecteur $\vec{u}$ du plan peut s'exprimer comme combinaison des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$, et ceci de manière unique : ces deux vecteurs forment ce que l'on appelle une **base** du plan.

Par exemple, ici, on a $\vec{u} = -2\,\vec{\imath} + 1{,}5\,\vec{\jmath}$

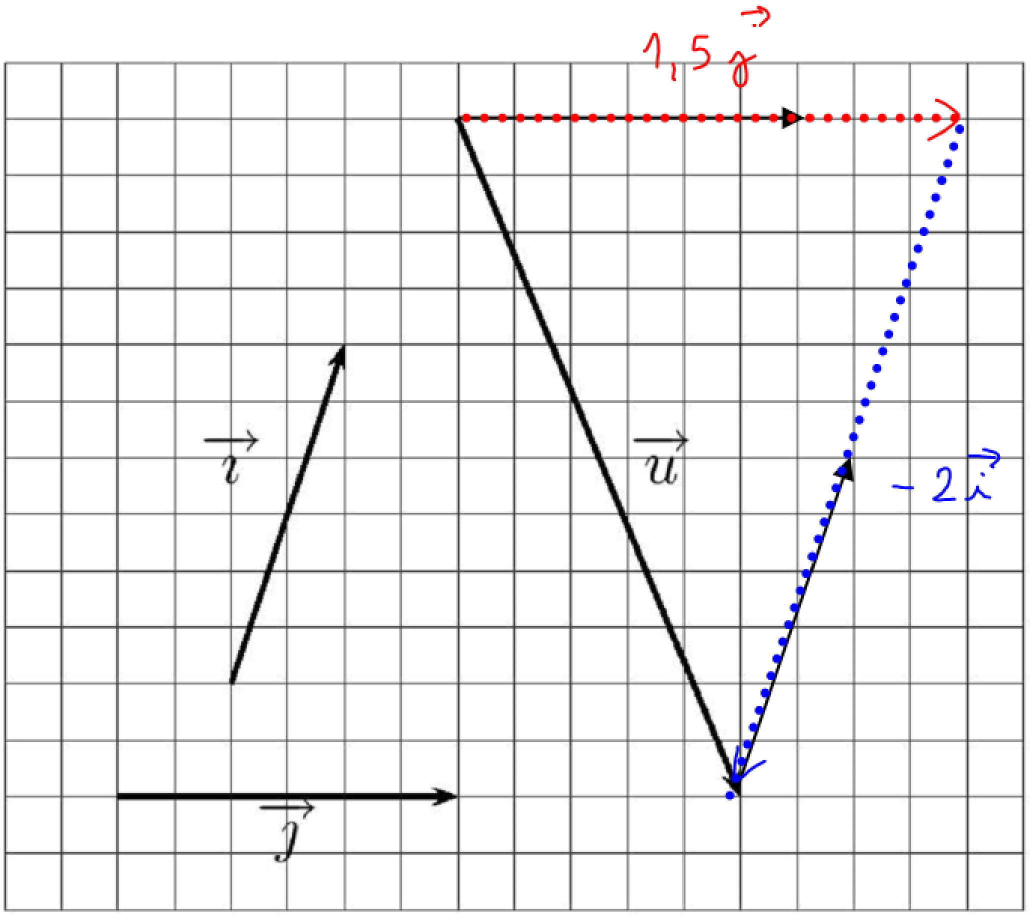
**Théorème et définition :**
Deux vecteurs **non colinéaires** du plan forment ce que l'on appelle une **base** du plan.
Dans cette base tout vecteur $\vec{u}$ du plan se décompose de manière unique sous la forme $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ où $(x; y)$ est un couple de nombres réels.

On dira que le vecteur $\vec{u}$ a pour **coordonnées** $x$ et $y$ dans la base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$. On notera $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Par exemple, si $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$ est une base du plan, alors :

- $\vec{u} = 5\vec{\imath} - \vec{\jmath} \iff \vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$
- $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \vec{v} = -2\,\vec{\imath} + 3\,.\,\vec{\jmath}$
- $\vec{\imath}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{\jmath}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{0}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{\imath} = 1\vec{\imath} + 0\vec{\jmath}$ $\quad \vec{\jmath} = 0\vec{\imath} + 1\vec{\jmath}$



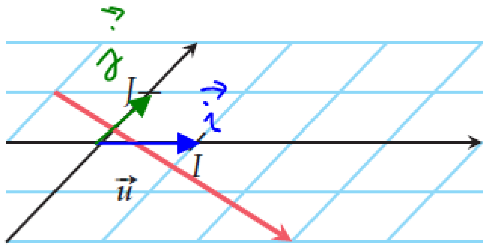

$\vec{u} = -2\vec{i} + 1{,}5\vec{j}$

donc dans la base $(\vec{i};\vec{j})$

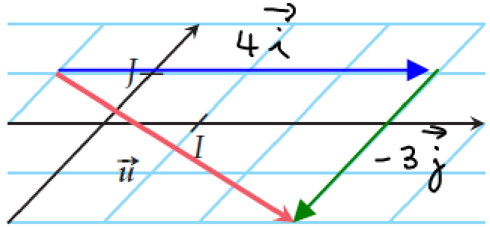
$\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1{,}5\end{pmatrix}$

**Exercice d'application**

Lire les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sur la figure ci-dessous.

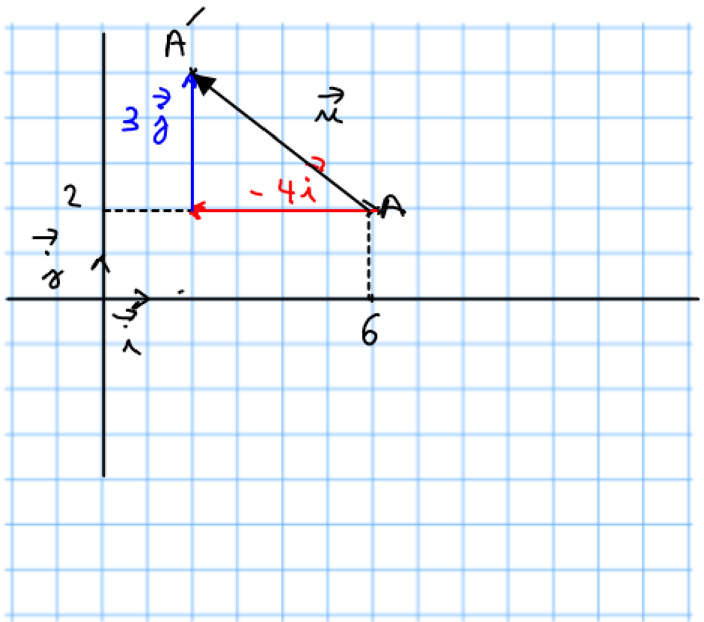



$\vec{u} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$




**Exercice d'application**

Dans un repère orthonormé, construire le représentant d'origine $A(6;2)$ du vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$.




$\vec{AA'}$ est le représentant d'origine A du vecteur $\vec{u}$

A' est l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$

Dans tout ce qui suit, le plan est muni d'une base $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$

**Egalité de deux vecteurs :**
Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, leurs coordonnées sont égales.
$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont égaux si, et seulement si, $x = x'$ et $y = y'$

**Somme de deux vecteurs :**
Soit $\vec{w}$ la somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Les coordonnées de $\vec{w}$ sont les sommes des coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ :
Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, alors $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\vec{w}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$.

**Produit d'un vecteur par un réel :**
Soit $\vec{u}$ un vecteur et $k$ un nombre réel.
Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ alors le vecteur $\vec{w} = k\vec{u}$ a pour coordonnées $\vec{w}\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$.

Par exemple, si $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ alors :

- $-\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$, $5\vec{v}\begin{pmatrix}25\\15\end{pmatrix}$
- $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$, $-\vec{u}+5\vec{v}\begin{pmatrix}24\\18\end{pmatrix}$

## 2 Colinéarité de deux vecteurs

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan, de coordonnées $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

Dire que ces deux vecteurs sont **colinéaires** revient à dire qu'il existe un réel $k$ non nul tel que $\vec{v} = k\vec{u}$. ceci se traduit au niveau des coordonnées par $x' = kx$ et $y' = ky$ ; autrement dit, les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **proportionnelles**. Les produits en croix sont donc égaux : $xy' = x'y$.

**Condition de colinéarité de deux vecteurs :**
Les vecteurs non nuls $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si, $xy' = x'y$
si et seulement si, $xy' - x'y = 0$

Par exemple :

- Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\9\end{pmatrix}$ sont colinéaires car d'une part $2\times 9 = 18$ d'autre part $-6\times(-3) = 18$ on a $\vec{v} = -3\vec{u}$

  $\times(-3)$ $\times(-3)$

- Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car d'une part $2\times(-7) = -14$ d'autre part $5\times(-3) = -15$

## 3 Calcul vectoriel dans un repère du plan

Dans tout ce qui suit, le plan est muni d'un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ :

**Coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ :**
Si $A$ a pour coordonnées $(x_A; y_A)$, et si $B$ a pour coordonnées $(x_B; y_B)$,
alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Delta x\\\Delta y\end{pmatrix}$$

Par exemple, si dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan on a $A(5;-3)$, $B(-1;6)$ et $C(7;2)$ alors on peut calculer les coordonnées de

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-5\\6-(-3)\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}7-5\\2-(-3)\end{pmatrix}$ $-3\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\times(-6)\\-3\times 9\end{pmatrix}$ $2\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\times 2\\2\times 5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6+2\\9+5\end{pmatrix}$ $-3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}18+4\\-27+10\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\9\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ $-3\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}18\\-27\end{pmatrix}$ $2\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\10\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\14\end{pmatrix}$ $-3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}22\\-17\end{pmatrix}$

Propriété :

- Deux droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
- Trois points $A$, $B$, $C$ sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires

exemple : $A(1;2)$ ; $B(3;1)$ et $C(5;3)$ sont-ils alignés ?

A, B, C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{AC}$. On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

Méthode : caractérisation d'une droite par une relation vectorielle

D'une part $2\times 2 = 4$
D'autre part $-1\times 2 = -2$
donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires

A, B, C ne sont pas alignés.

## Application :

On se place dans un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1/ Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-10\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\15\end{pmatrix}$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\-12\end{pmatrix}$ c) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-\frac{14}{3}\\3,5\end{pmatrix}$

c) D'une part $4\times3,5=14$

D'autre part $-3\times\left(-\frac{14}{3}\right)=14$

Les produits en croix sont égaux donc $\vec{u}\,//\,\vec{v}$

a) D'une part $4\times15=60$

D'autre part $-10\times(-6)=60$

Les produits en croix sont égaux donc $\vec{u}\,//\,\vec{v}$

b) D'une part $2\times-12=-24$

D'autre part $-6\times(-4)=24$

$-24\neq24$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Question supplémentaire : Ecrire $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i};\vec{j})$

a) $\vec{u}=4\vec{i}-10\vec{j}$

$\vec{v}=-6\vec{i}+15\vec{j}$

2/ Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

a) A(8 ; 5) ; B(2 ; 2) ; C(–3 ; 0) ; D(5 ; 4)

b) A(–2 ; 3) ; B(0 ; 2) ; C(3 ; –1) ; D(–1 ; 2)

c) A(2 ; 1) ; B(5 ; –3) ; C(0 ; 3) et D(6 ; –5)

$(AB)\,//\,(CD) \iff \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$ d'une part : $-6\times4=-24$

d'autre part : $-3\times8=-24$

Les produits en croix sont égaux donc $\overrightarrow{AB}\,//\,\overrightarrow{CD}$

Il en résulte que $(AB)\,//\,(CD)$

b) De la même façon :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ d'une part : $2\times3=6$

d'autre part : $-1\times(-4)=4$

$6\neq4$ donc (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

c) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}6\\-8\end{pmatrix}$ d'une part : $3\times(-8)=-24$

d'autre part : $-4\times6=-24$

donc $(AB)\,//\,(CD)$

3/ les points A, B et C sont-ils alignés ?

A, B, C sont alignés $\Leftrightarrow \vec{AB} // \vec{AC} \Leftrightarrow \vec{AB} // \vec{BC}$

a) A(2 ; 3) ; B(5 ; 7) et C(–7 ; –9)

b) A(5 ; 7) ; B(0 ; 1) et C$\left(-\dfrac{3}{4}, 0\right)$

c) A(1 ; 1) ; B(–2 ; –1) et C(2,5 ; 2)

d) A(3 ; 4) ; B(–7 ; –3) et C(0; 2)

a) $\vec{AB}\left( \quad \right)$ $\vec{AC}\left( \quad \right)$

b) $\vec{AB}\left( \quad \right)$ $\vec{BC}\left( \quad \right)$

4/ Déterminer $x$ pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ 2+x \end{pmatrix}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -x \\ 3x \end{pmatrix}$