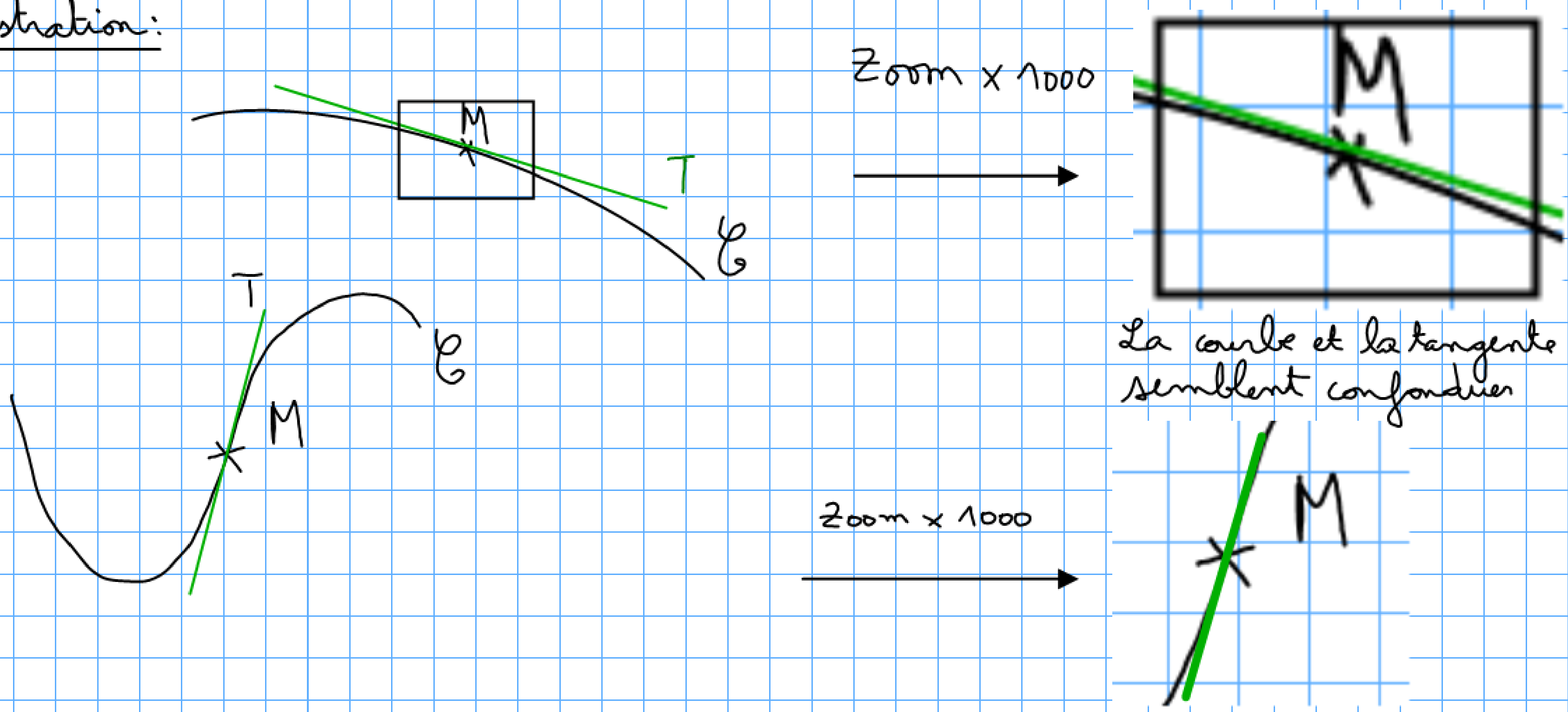
Chapitre 6 : nombre dérivé

I Notion de tangente

1) Définition :

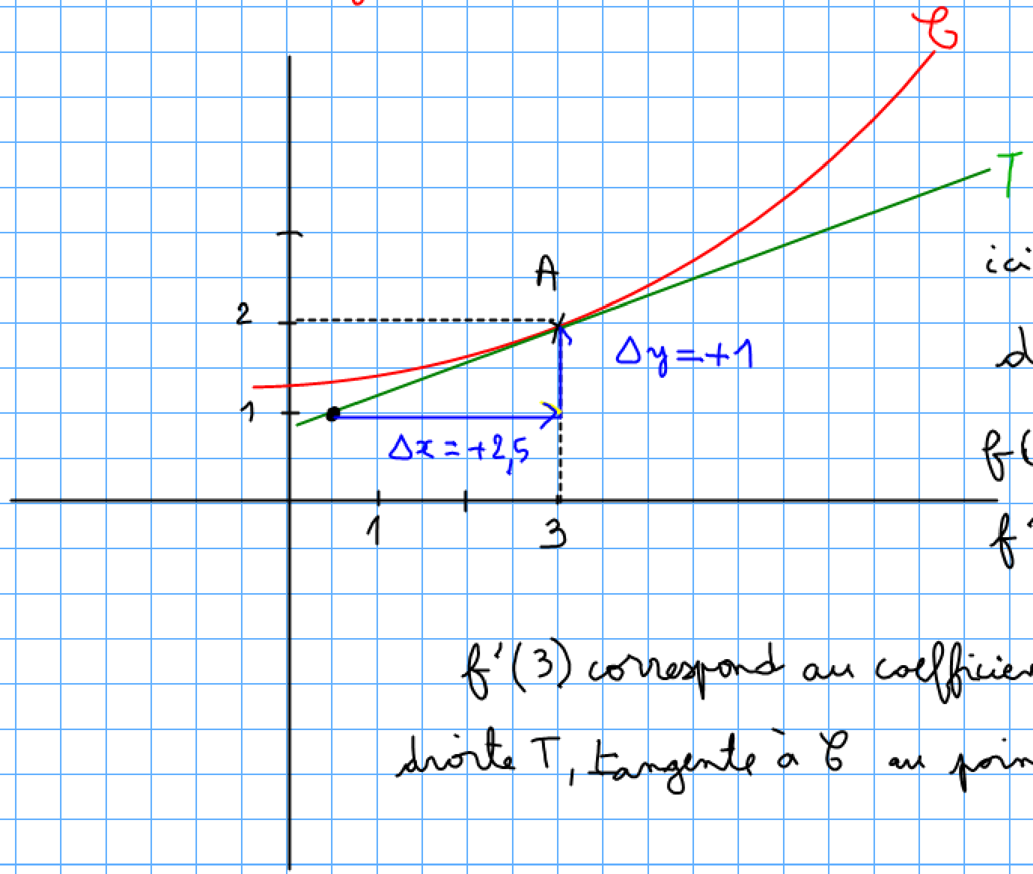
on appelle tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point M, si elle existe, la droite qui approche le mieux la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage du point M.

Illustration :



2. Nombre dérivé en un point A d'abscisse a

Définition : Soit f une fonction et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan. Si la courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente non verticale en un point A d'abscisse a, alors on appelle nombre dérivé de f en a, noté $f'(a)$ le coefficient directeur de cette tangente.



ici $x_A = 3$

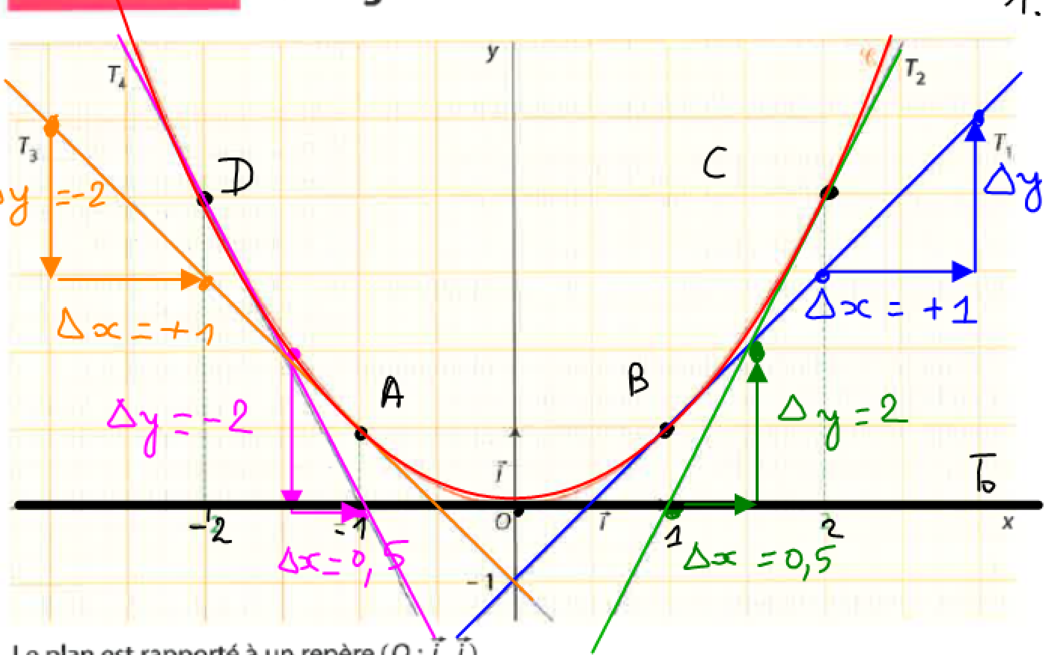
donc $a = 3$

$f(3) = 2$

$f'(3) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{2,5} = \dfrac{2}{5} = 0,4$

$f'(3)$ correspond au coefficient directeur de la droite T, tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 3

Activité La tangente et son coefficient directeur



Le plan est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
T_1, T_2, T_3 et T_4 sont respectivement les tangentes à $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses 1 ; 2 ; – 1 et – 2. L'axe des abscisses est la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

1. Déterminer, à l'aide du graphique, les coefficients directeurs des droites T_1, T_2, T_3 et T_4.

2. On note $f'(x_A)$ le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse x_A.
Déterminer $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$ et $f'(-2)$.

BON A SAVOIR

On peut lire directement le coefficient directeur a de la droite ou appliquer la formule $a = \dfrac{y_N - y_M}{x_N - x_M}$.

→ Voir le chapitre 1.

1. on note m_1 ; m_2 ; m_3 ; m_4 les coefficients directeurs respectifs des droites T_1 ; T_2 ; T_3 ; T_4

$$m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = 2$$

$$m_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{0,5} = 4$$

$$m_3 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{+1} = -2$$

$$m_4 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{+0,5} = -4$$

2. O est le point d'abscisse 0, T_0 est la tangente en O.

- A est le point d'abscisse -1. T_3 est la tangente en A
  $f'(-1)$ correspond au coefficient directeur de T_3
  $f'(-1) = -2$
- B est le point d'abscisse 1. T_1 est la tangente en B
  $f'(1)$ correspond au coefficient de la droite T_1 tangente à $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse 1.
  $f'(1) = 2$.

La tangente est horizontale : son coefficient directeur est donc nul.
$f'(0)$ correspond au coefficient directeur de la droite T_0, tangente à $\mathscr{C}_f$ au point O d'abscisse 0.
$f'(0) = 0$.

- C est le point d'abscisse 2. T_2 est la tangente à C_f en C.

  $f'(2)$ correspond au coefficient directeur de la droite T_2, tangente à C_f au point d'abscisse 2. $f'(2) = 4$.

- D est le point d'abscisse −2. T_4 est la tangente en D

  $f'(-2)$ correspond au coefficient directeur de la droite T_4, tangente à C_f au point D d'abscisse −2. $f'(-2) = -4$

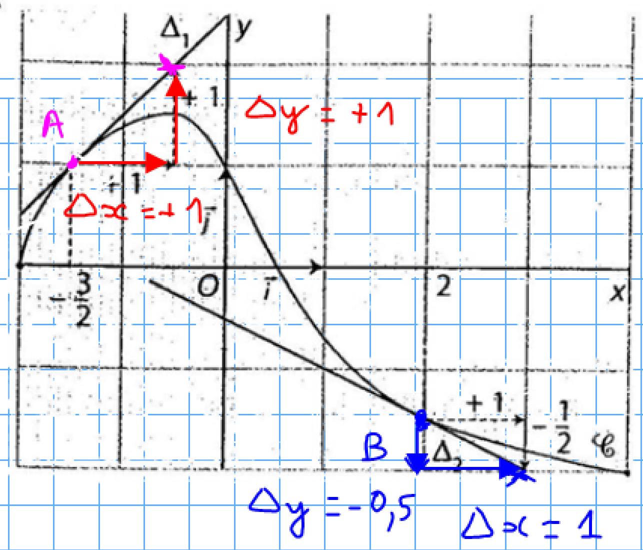
Méthode : déterminer un nombre dérivé

Pour déterminer un nombre dérivé $f'(a)$, on détermine le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a :

- Il peut être lu directement sur une représentation graphique ;
- Il peut être obtenu en utilisant la formule $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, où A et B sont deux points distincts de la tangente ;
- Il peut être donné directement si l'équation de la tangente, de la forme $y = mx + p$ est connue (c'est le nombre m).

Exercice : Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$. $\mathcal{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur [-2 ;4].

- Δ_1 et Δ_2 sont respectivement les tangentes à $\mathcal{C}$ aux points d'abscisses et $-\frac{3}{2}$ et 2.
- En $x=-\frac{1}{2}$, $\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.



1- Déterminer les valeurs de $f'(-\frac{3}{2})$, $f'(2)$, $f'(-\frac{1}{2})$

2-a) La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées $(-\frac{1}{2}, 2)$. Déterminer $f'(0)$.

b) Une équation de la tangente à C au point d'abscisse - 2 est $y = 3x+6$. Déterminer $f'(-2)$.

1. • $f'(-3/2)$ correspond au coefficient directeur de la droite Δ_1 tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse $-3/2$ $f'(-3/2) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{1} = 1$

• $f'(2)$ correspond au coefficient directeur de la droite Δ_2 tangente à $\mathcal{C}$ au point B d'abscisse 2 $f'(2) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -0,5$

• $f'(-2)$ correspond au coefficient directeur de la droite Δ_3 tangente à $\mathcal{C}$ au point D d'abscisse -2.
Δ_3 est horizontale donc son coefficient directeur est nul. $f'(-2) = 0$

2. Soit E le point de coordonnées $(-\frac{1}{2}; 2)$. Le point de la courbe d'abscisse 0 est $F(0;1)$.
$f'(0)$ correspond au coefficient directeur de la droite (EF) tangente à $\mathcal{C}$ au point F d'abscisse 0

$$f'(0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_E - y_F}{x_E - x_F} = \frac{2-1}{-\frac{1}{2}-0} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = \frac{-2}{1} = -2$$

b) La tangente au point d'abscisse -2 a pour coefficient directeur $m = 3$ donc $f'(-2) = 3$.

Application 1

Dans le plan rapporté à un repère orthogonal, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

1. La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 3 passe par les points $A(1\,;-2)$ et $B(-2\,;4)$. Déterminer $f'(3)$.

2. La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -3 a pour équation $y = -\frac{1}{2}x - 1$. Déterminer $f'(-3)$.

Application 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm).

1. Tracer avec précision la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

2. Tracer, sur ce graphique, la droite T, tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2, sachant que $f'(2) = -\frac{1}{4}$.

1. $f'(3)$ correspond au coefficient directeur de la droite (AB) tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3.

$$f'(3) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-2-4}{1-(-2)} = \frac{-6}{3}$$

$$f'(3) = -2$$

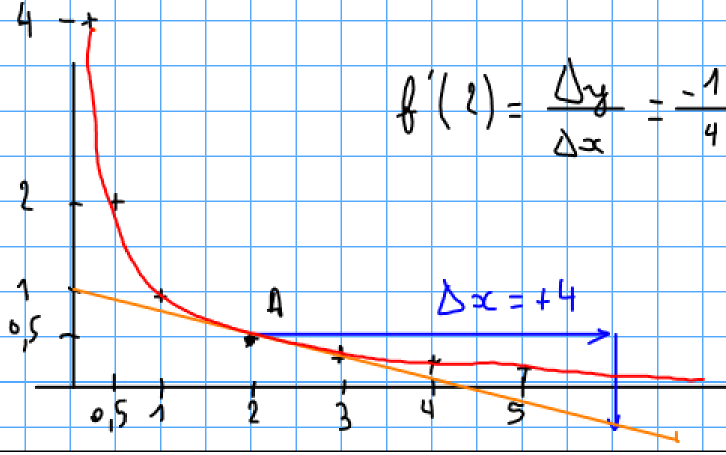
2. $f'(-3)$ correspond au coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -3.

La tangente a pour coefficient directeur $m = -\frac{1}{2}$

donc $f'(-3) = -\frac{1}{2}$

1. Dressons un tableau de valeurs

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$f(x)$	2	1	0,67	0,5	0,4	0,33	0,28	0,25	0,22	[illegible]



$$f'(2) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{4}$$

3) Équation réduite d'une tangente

Propriété

Soit f une fonction dérivable en un réel a et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a, a pour équation réduite :

$$T : y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Preuve : T admet une équation réduite de la forme $y = mx + p$

avec $m = f'(a)$

Déterminons p à l'aide du point $A(a ; f(a))$

$A \in T$ donc $y_A = m x_A + p$

$$f(a) = f'(a) \times a + p$$

$$\Leftrightarrow p = f(a) - f'(a) \times a$$

on a donc $T : y = mx + p$

$$\Leftrightarrow \quad y = \underline{f'(a)}\, x + f(a) - \underline{f'(a)} \times a$$

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Exemple : donner l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction inverse au point d'abscisse 2.

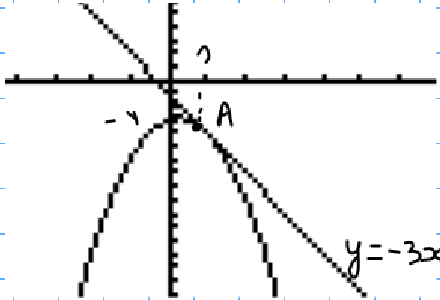
$T : y = f'(a)(x-a) + f(a)$

pour $a=2$ on a : $T : y = f'(2)(x-2) + f(2)$ avec $f'(2) = -\frac{1}{4}$ $f(2) = 0{,}5$

$= -\frac{1}{4}(x-2) + 0{,}5$

$= -\frac{1}{4}x + 0{,}5 + 0{,}5$

$T : y = -\frac{1}{4}x + 1$



Application : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + x - 3$

Sachant que $f'(1) = -3$, donner l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 1.

$T : y = f'(a)(x-a) + f(a)$

pour $a = 1$ on a $T : y = f'(1)(x-1) + f(1)$ avec $f'(1) = -3$

$y = -3(x-1) - 4$

$y = -3x + 3 - 4$

$y = -3x - 1$

$f(1) = -2\times 1^2 + 1 - 3$
$= -2\times 1 + 1 - 3$
$= -2 + 1 - 3$
$= -4$

II Sens de variation et signe du nombre dérivé

1) Activité : surf sur une courbe

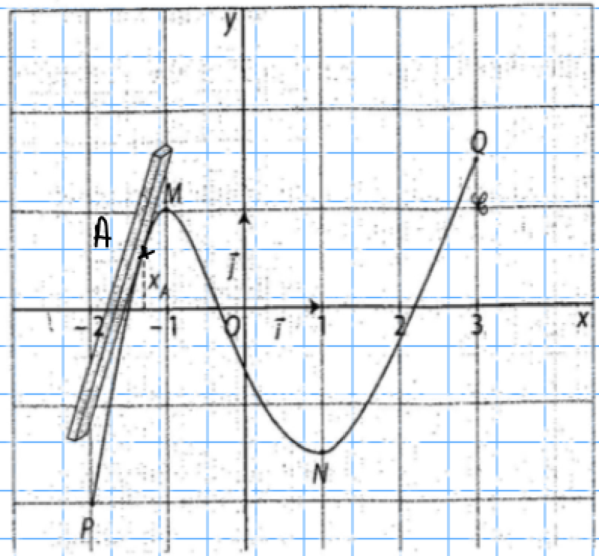
On donne, ci-contre, un tracé de la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2\,;3]$.
En chacun des points M et N d'abscisses respectives -1 et 1, la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Donner les valeurs de $f'(-1)$ et de $f'(1)$.

2. Dresser le tableau de variation de f.

3. Placer sur le graphique une règle matérialisant une tangente à la courbe $\mathscr{C}$, en un point d'abscisse x_A, situé entre P et M.
Quel est le signe du coefficient directeur de cette tangente ?
En déduire le signe de $f'(x_A)$.

4. Reprendre la question 3 pour un point de $\mathscr{C}$ situé entre M et N, puis pour un point de $\mathscr{C}$ situé entre N et Q.



$f'(-1)$ correspond au coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point M d'abscisse -1.
En M la tangente est horizontale donc son coefficient directeur est nul
$f'(-1)=0$
De même au point N d'abscisse 1 la tangente est horizontale donc
$f'(1)=0$

5. « Parcourir » avec la règle toute la courbe, de P à Q, pour compléter la ligne « signe de $f'(x)$ » du tableau de variation.

x	-2		-1		1		3
sens de variation de f		↗	1	↘	$-1{,}5$	↗	$1{,}5$
signe de $f'(x)$		+	0	−	0	+	

$f'(x)>0$ pour tout x appartenant à un intervalle où f est strictement croissante. $f'(x)<0$ pour tout x appartenant à un intervalle où f est strictement décroissante.

Quel est le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à un intervalle où f est strictement croissante ? Quel est le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à un intervalle où f est strictement décroissante ?

3. Pour tout point A situé entre P et M la tangente en A est une droite qui monte. Son coefficient directeur est donc positif. On en déduit que $f'(x_A)>0$

4. De même pour tout point A situé entre N et Q la tangente en A monte : son coefficient directeur est positif et $f'(x_A)>0$.

5. Pour tout point A situé entre M et N, la tangente en A descend : son coefficient directeur est donc négatif. $f'(x_A)<0$

2. Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et admettant une tangente en tout point de I

- Sur tout intervalle où f est strictement croissante (la courbe « monte »), $f'(x) \geq 0$;
- Sur tout intervalle où f est strictement décroissante (la courbe « descend »), $f'(x) \leq 0$;

Application 1

On donne le tableau de variation d'une fonction f définie sur $[-1\,;7]$:

x	-1		1		2		4		7
$f(x)$	0	↗	2	↘	-1	↗	3	↘	0

Préciser, en fonction du nombre réel x appartenant à $[-1\,;7]$, le signe de $f'(x)$.

x	-1		1		2		4		7
$f(x)$	0	↗	2	↘	-1	↗	3	↘	0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Le nombre dérivé est nul en tout point où f admet un extremum (minimum ou maximum)

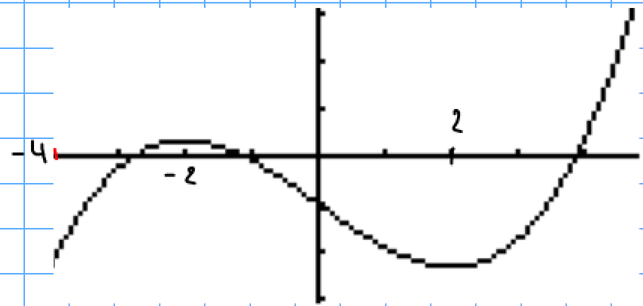
Application 2

Soit f la fonction définie sur $[-4\,;5]$ par

$$f(x) = \frac{1}{12}x^3 - x - 1.$$

1. Tracer la courbe représentative de f sur l'écran de la calculatrice.

2. Déterminer, en fonction du nombre réel x appartenant à $[-4\,;5]$, le signe de $f'(x)$.



x	-4		-2		2		5
$f(x)$		↗		↘		↗	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	