LOI BINOMIALE

I. Schéma de Bernoulli

1) Définition

Exemples :

a) On lance un dé 5 fois de suite et on note à chaque fois le résultat. On répète ainsi la même expérience (lancer un dé) et les expériences sont indépendantes l'une de l'autre (un lancer n'influence pas le résultat d'un autre lancer).
A chaque lancer, on considère comme succès "*obtenir un six*" et comme échec "*ne pas obtenir un six*".

b) On lance une pièce de monnaie 20 fois de suite. Ces expériences sont identiques et indépendantes.
On considère comme succès "*obtenir Pile*" et comme échec "*obtenir Face*".

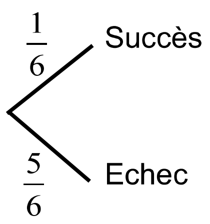
c) Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne.
On répète cette expérience 10 fois de suite. Ces expériences sont identiques et indépendantes.
On considère comme succès "*obtenir une boule blanche*" et comme échec "*obtenir une boule noire*".

Définition : Un schéma de Bernoulli est la répétition de n expériences identiques et indépendantes à 2 issues nommées "succès" et "échec"

2) Arbre pondéré

On reprend les exemples précédents :

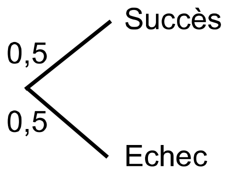
a) Pour chaque expérience (lancer de dé), on a les probabilités suivantes :



On répète cette expérience 5 fois, la probabilité du succès est égale à $\frac{1}{6}$.

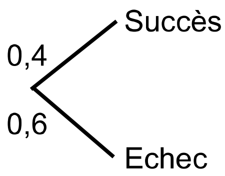
On dit ici que n = 5 et $p=\frac{1}{6}$ sont les paramètres du schéma de Bernoulli.

b) Pour chaque expérience (lancer d'une pièce), on a les probabilités suivantes :



On répète cette expérience 20 fois, la probabilité du succès est égale à 0,5.
On dit ici que n = 20 et $p = 0,5$ sont les paramètres du schéma de Bernoulli.

b) Pour chaque expérience (tirer une boule), on a les probabilités suivantes :



$\frac{2}{5} = 0,4$

$\frac{3}{5} = 0,6$

On répète cette expérience 10 fois, la probabilité du succès est égale à 0,4.
On dit ici que n = 10 et $p = 0,4$ sont les paramètres du schéma de Bernoulli.

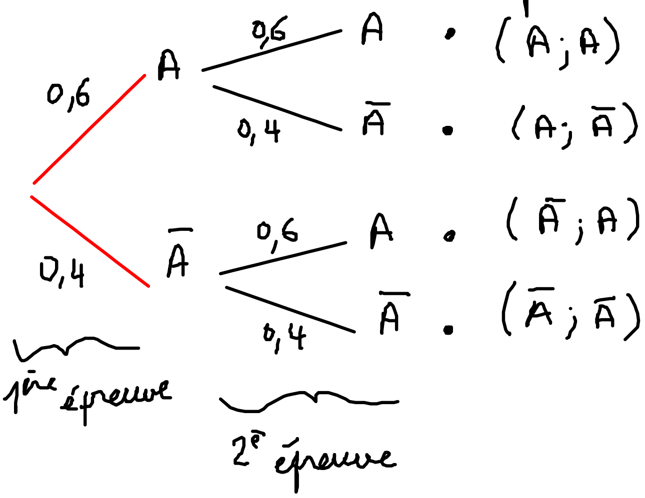
Méthode : Représenter un schéma de Bernoulli dans un arbre pondéré

On considère l'expérience suivante :
Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules rouges. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. On répète l'expérience deux fois de suite.
1) Représenter l'ensemble des issues de ces expériences dans un arbre.
2) Déterminer les probabilités suivantes :
  a) On tire deux boules blanches.
  b) On tire une boule blanche et une boule rouge.
  c) On tire au moins une boule blanche.

1) On note A l'événement "obtenir une boule blanche", considéré comme succès
l'échec est l'événement $\bar{A}$: "ne pas obtenir une boule blanche"

$p(A) = \frac{3}{5} = 0,6$

$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$



Il s'agit d'une expérience à 2 épreuves identiques et indépendantes.
L'expérience compte 4 issues.

2a) L'issue (A ; A) réalise l'événement : " on tire 2 boules blanches"

Méthode : La probabilité d'une issue est égale au PRODUIT des probabilités portées par les branches conduisant à cette issue.

On a donc $p(A;A) = 0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}36$

2b) l'événement : " on tire une boule blanche et une boule rouge " est l'événement $\{(A;\bar{A});(\bar{A};A)\}$

2 issues réalisent cet événement

Méthode : La probabilité d'un événement est égale à la SOMME des probabilités des issues qui le réalisent.

on note C : " on tire une boule rouge et une boule blanche "

$C = \{(A;\bar{A});(\bar{A};A)\}$

$p(C) = p(A;\bar{A}) + p(\bar{A};A)$

$= 0{,}6 \times 0{,}4 + 0{,}6 \times 0{,}4$

$= 0{,}24 + 0{,}24$

$= 0{,}48$

c) Soit D : " on tire au moins une boule blanche "

$\bar{D}$: " on ne tire aucune boule blanche "

$\bar{D}$: " on tire exactement 2 boules rouges "

$D = \{(A;\bar{A});(\bar{A};A);(A;A)\}$ $\qquad$ $\bar{D} = \{(\bar{A};\bar{A})\}$

$p(D) = p(A;\bar{A}) + p(\bar{A};A) + p(A;A)$

$= 0{,}6 \times 0{,}4 + 0{,}4 \times 0{,}6 + 0{,}6 \times 0{,}6$

$= 0{,}24 + 0{,}24 + 0{,}36$

$= 0{,}84$

$p(\bar{D}) = 0{,}4 \times 0{,}4$

$= 0{,}16$

alors $p(D) = 1 - p(\bar{D})$

$= 1 - 0{,}16 = 0{,}84$

II. Loi binomiale

1) Variable aléatoire

Exemple :

On lance 5 fois de suite une pièce de monnaie. On considère comme succès "*obtenir Pile*".
On réalise donc un schéma de Bernoulli de paramètre $n = 5$ et $p = 0,5$.
On note X le nombre de succès. X est appelé la variable aléatoire associée au schéma.
Dans ce cas, la probabilité d'obtenir 3 fois « Pile » se note P(X=3).

Définition : On réalise un schéma de Bernoulli composé de n expériences. identiques et indépendantes.....
La **variable aléatoire** X associé au schéma compte le nombre de succès obtenus.
On dit que la variable aléatoire X suit une **loi binomiale** de paramètres n et p.

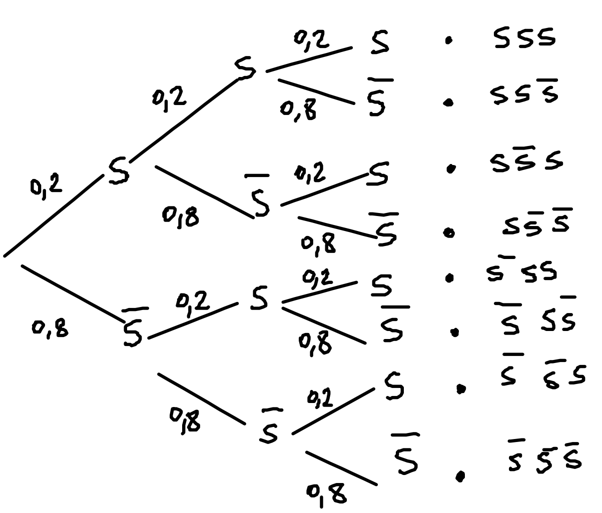
Remarque : n et p sont les paramètres de la loi binomiale

2) Avec un arbre pondéré

Méthode : Utiliser une loi binomiale

Vidéo https://youtu.be/b18_r8r4K2s

Une urne contient 2 boules gagnantes et 8 boules perdantes. Une expérience consiste à tirer au hasard 3 fois de suite une boule en la remettant à chaque fois dans l'urne.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules gagnantes.
a) Quelle est la loi suivie par X ?
b) Calculer la probabilité P(X=2) d'obtenir 2 boules gagnantes.
c) Calculer la probabilité P(X≥2) d'obtenir au moins 2 boules gagnantes.



$p(SSS) = 0,2^3 = 1\times0,2^3\times0,8^0$	$X=3$
$p(SS\bar{S}) = 0,2^2\times0,8$	$X=2$
$p(S\bar{S}S) = 0,2\times0,8\times0,2 = 0,2^2\times0,8$	$X=2$
$p(S\bar{S}\bar{S}) = 0,2\times0,8^2$	$X=1$
$p(\bar{S}SS) = 0,8\times0,2^2 = 0,2^2\times0,8$	$X=2$
$p(\bar{S}S\bar{S}) = 0,8\times0,2\times0,8 = 0,2\times0,8^2$	$X=1$
$p(\bar{S}\bar{S}S) = 0,8^2\times0,2$	$X=1$
$p(\bar{S}\bar{S}\bar{S}) = 0,8^3 = 1\times0,2^0\times0,8^3$	$X=0$

a) On considère l'épreuve de Bernoulli : « tirer une boule au hasard »
dont le succès S est : "obtenir une boule gagnante". On a $p(S) = \frac{2}{10} = 0,2$
On répète 3 fois de façon identique & indépendante cette épreuve
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès de cette expérience.
X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,2$

b) $(X=2)$: « obtenir 2 boules gagnantes »
D'après l'arbre, 3 issues réalisent $(X=2)$

De façon générale
$p(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$p(X=2) = 0,2^2 \times 0,8 + 0,2^2 \times 0,8 + 0,2^2 \times 0,8$

nbr de succès

nbr d'échecs

$= 3 \times 0,2^2 \times 0,8^1$

probabilité du succès

probabilité de l'échec

coefficient binomial noté $\binom{3}{2}$
correspondant au nombre de chemins conduisant à 2 succès parmi 3 épreuves

$P(X=2) = 0,096$

De la même façon $p(X=1) = \binom{3}{1} \times 0,2^1 \times 0,8^2$
$= 3 \times 0,2 \times 0,8^2 = 0,384$

$p(X=3) = \binom{3}{3} \times 0,2^3 \times 0,8^0$

$= 1 \times 0,2^3 \times 1 = 0,2^3 = 0,008$

$p(X=0) = \binom{3}{0} \times 0,2^0 \times 0,8^3$
$= 1 \times 1 \times 0,8^3 = 0,8^3 = 0,512$

c) $(X \geqslant 2)$: « on obtient au moins 2 boules gagnantes »

$X \in \{0; 1; 2; 3\}$

$p(X \geqslant 2) = p(X=2) + p(X=3) = 0,096 + 0,008 = 0,104$
$= \binom{3}{2} 0,2^2 \times 0,8^1 + \binom{3}{3} \times 0,2^3 \times 0,8^0$

$= 3 \times 0,2^2 \times 0,8 + 0,2^3 = 0,104$

Remarque : l'événement contraire de $(X \geqslant 2)$ est $(X \leqslant 1)$. Donc $p(X \geqslant 2) = 1 - p(X \leqslant 1)$
$= 1 - 0,896$
$= 0,104$

0,896 obtenu avec la calculatrice en mode STAT

3) Avec la calculatrice ou un tableur

Méthode : Utiliser une loi binomiale

Vidéo https://youtu.be/7k4ZYdfWEY8

Vidéo https://youtu.be/69IQIJ7lyww

Vidéo https://youtu.be/8f-cfVFHlxg

Vidéo https://youtu.be/l9OoHVRpM8U

On lance 7 fois de suite un dé à 6 faces.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois que le dé affiche un nombre supérieur ou égal à 3.
a) Quelle est la loi suivie par X ?
b) Calculer la probabilité P(X=5).
c) Calculer la probabilité P(X≤5).
d) Calculer la probabilité P(X≥3).

a) On considère l'épreuve de Bernoulli : "lancer un dé à 6 face" dont le succès S est : "le dé affiche un nombre supérieur ou égal à 3". On a $p(S) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
On répète 7 fois de façon identique et indépendante cette épreuve.
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès de cette expérience.
X suit une loi binomiale de paramètres $n=7$ et $p = \frac{2}{3}$

Avec la formule : $p(X=5) = \binom{7}{5} \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2$
$= 21 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 0{,}307$

b) Avec Texas Instruments :
Touches « *2nd* » et « *VAR* » puis choisir « *binomFdP* ».
Et saisir les paramètres de l'énoncé : binomFdP(7 , 2/3 , 5)
Syntaxe : Binom FdP(n; p; k)

Avec Casio :
Touche « *OPTN* » puis choisir « *STAT* », « *DIST* », « *BINM* » et « *Bpd* ». Syntaxe Bpd(k, n, p)
Et saisir les paramètres de l'énoncé : BinominalePD(5, 7, 2/3)

Avec le tableur :
Saisir dans une cellule : =LOI.BINOMIALE(5; 7; 2/3; 0)

On trouve P(X=5) ≈ 0,31
La probabilité d'obtenir 5 fois un nombre supérieur ou égal à 3 est environ égale à 0,31
Avec le mode STAT de la calculatrice CASIO Binom FCD pour obtenir $p(X \leq k)$
Binom Fpd pour obtenir $p(X = k)$

c) Avec Texas Instruments :
Touches « *2nd* » et « *VAR* » puis choisir « *binomFRép* ».
Et saisir les paramètres de l'énoncé : binomFRép(7, 2/3, 5)
n, p, k

Avec Casio :
Touche « *OPTN* » puis choisir « *STAT* », « *DIST* », « *BINM* » et « *Bcd* ».
Et saisir les paramètres de l'énoncé : BinominaleCD(5, 7, 2/3)
k, n, p

Avec le tableur :
Saisir dans une cellule : =LOI.BINOMIALE(5 ; 7; 2/3;1)

On trouve P(X≤5) ≈ 0,74 .
La probabilité d'obtenir au plus 5 fois un nombre supérieur ou égal à 3 est environ égale à 0,74 .

d) P(X≥3) = ? Méthode : $X \in \{0;1;2;3;4;5;6;7\}$

$X \geqslant 3$

L'événement contraire est $(X \leqslant 2)$
On utilise l'événement contraire car la calculatrice ne fournit que $p(X \leqslant k)$

$p(X \geqslant 3) = 1 - p(X \leqslant 2) = 1 - 0{,}045 \simeq 0{,}955$

0,045 obtenu à l'aide de BinomFrep (Ti) ou BinomFcd (casio)

4) Représentation graphique

Méthode : Représenter une loi binomiale par un diagramme en bâtons

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre n = 5 et p = 0,4.
Représenter graphiquement la loi suivie par X par un diagramme en bâtons.

On commence par afficher le tableau de valeurs exprimant P(X=k) pour k entier, $0 \le k \le 5$.

Avec Texas Instruments :
Touche « *Y=* » et saisir comme expliqué dans la paragraphe II.3 :

```
 Plot1  Plot2  Plot3
\Y1■binomFdp(5,0.4,X)
```

Afficher la table : Touches « *2nd* » et « *GRAPH* » :

X	Y1
0	.07776
1	.2592
2	.3456
3	.2304
4	.0768
5	.01024
6	0

X=0

Avec Casio :
Dans « *MENU* », choisir « *TABLE* » ;
Saisir comme expliqué dans la paragraphe II.3 :

```
Table Func  :Y=
Y1:BinomialPD(X,5,0.4)
```

Afficher la table : Touche « *TABL* » :

X	Y1
1	0.0777
2	0.2592
3	0.3456
4	0.2304

Avec le tableur :

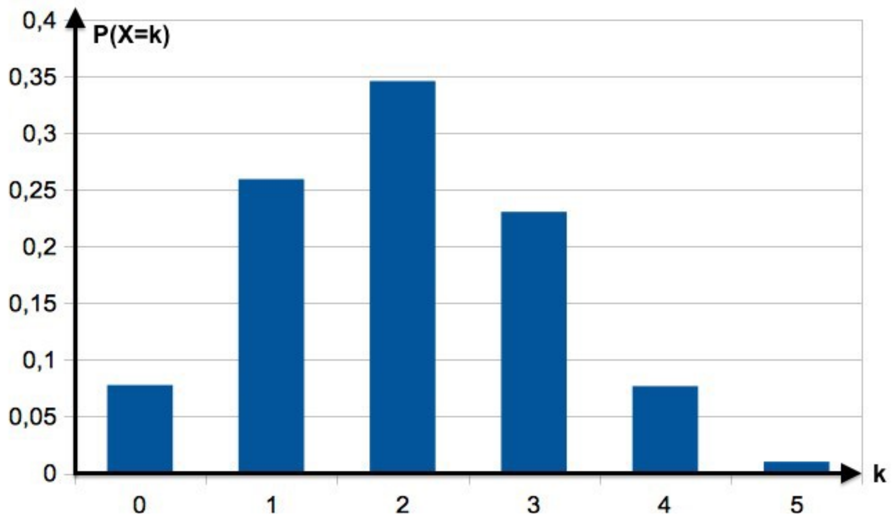
Saisir dans la cellule B1 : =LOI.BINOMIALE(A1;5;0,4;0)

Et copier cette formule vers le bas.

B1 fx =LOI.BINOMIALE(A1;5;0,4;0)

	A	B	C	D
1	0	0,07776		
2	1	0,2592		
3	2	0,3456		
4	3	0,2304		
5	4	0,0768		
6	5	0,01024		

On représente ensuite la loi binomiale par un diagramme en bâtons :



III. Espérance de la loi binomiale

Définition : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètre n et p.
Lorsqu'on réalise un grand nombre de fois le schéma de Bernoulli correspondant, la moyenne du nombre de succès se rapproche d'un nombre appelé l'espérance de X.

Propriété : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.
Alors : E(X) = …n x p………

Méthode : Calculer l'espérance d'une loi binomiale

Vidéo https://youtu.be/95t19fznDOU

Un QCM comporte 8 questions. A chaque question, trois solutions sont proposées ; une seule est exacte.
Chaque bonne réponse rapporte 0,5 point.
On répond au hasard à chaque question.
1) Combien de bonnes réponses peut-on espérer obtenir ?
2) Quelle note peut-on alors espérer obtenir ?

Questions préliminaires

a) Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès
Quelle est la loi suivie par X ?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 bonnes réponses ?

c) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 3 bonnes réponses ?

a) On considère l'épreuve de Bernoulli : « répondre au hasard à une question » dont le succès S est : " obtenir une bonne réponse "
on a $P(S) = \frac{1}{3}$
On répète 8 fois de façon identique et indépendante cette épreuve.
X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = \frac{1}{3}$

b) $p(X=3) = \binom{8}{3} \times p^3 \times (1-p)^5 = \binom{8}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 = 56 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5$
$\simeq 0,273$

c) $p(X \geqslant 3) = 1 - p(X \leqslant 2) = 1 - 0,468$
$= 0,532$

1) $E(X) = n \times p = 8 \times \frac{1}{3} = 2,67$

note : $2,667 \times 0,5 = 1,33$ point