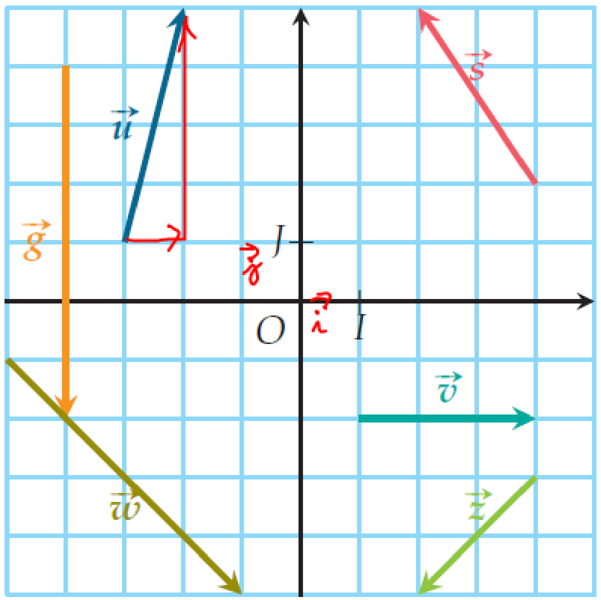
Activité d'approche

Lire les coordonnées des vecteurs. dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$

1) $\vec{u}$ 3) $\vec{w}$ 5) $\vec{z}$

2) $\vec{v}$ 4) $\vec{s}$ 6) $\vec{g}$



$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ $\vec{g}\begin{pmatrix}0\\-6\end{pmatrix}$

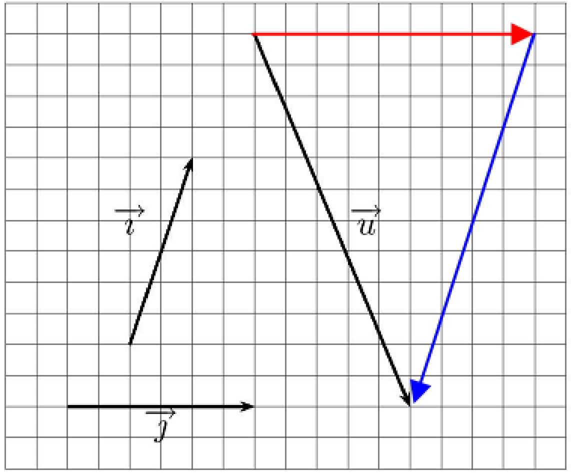
$\vec{v}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ $\vec{s}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$

$\vec{w}\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$

$\vec{z}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$

Ch 09 Repérage dans le plan

1 Base ; coordonnées d'un vecteur



Soient $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ deux vecteurs **non colinéaires** du plan. Tout vecteur $\vec{u}$ du plan peut s'exprimer comme combinaison des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$, et ceci de manière unique : ces deux vecteurs forment ce que l'on appelle une **base** du plan.

Par exemple, ici, on a $\vec{u} = -2\,\vec{\imath} + 1{,}5\,\vec{\jmath}$

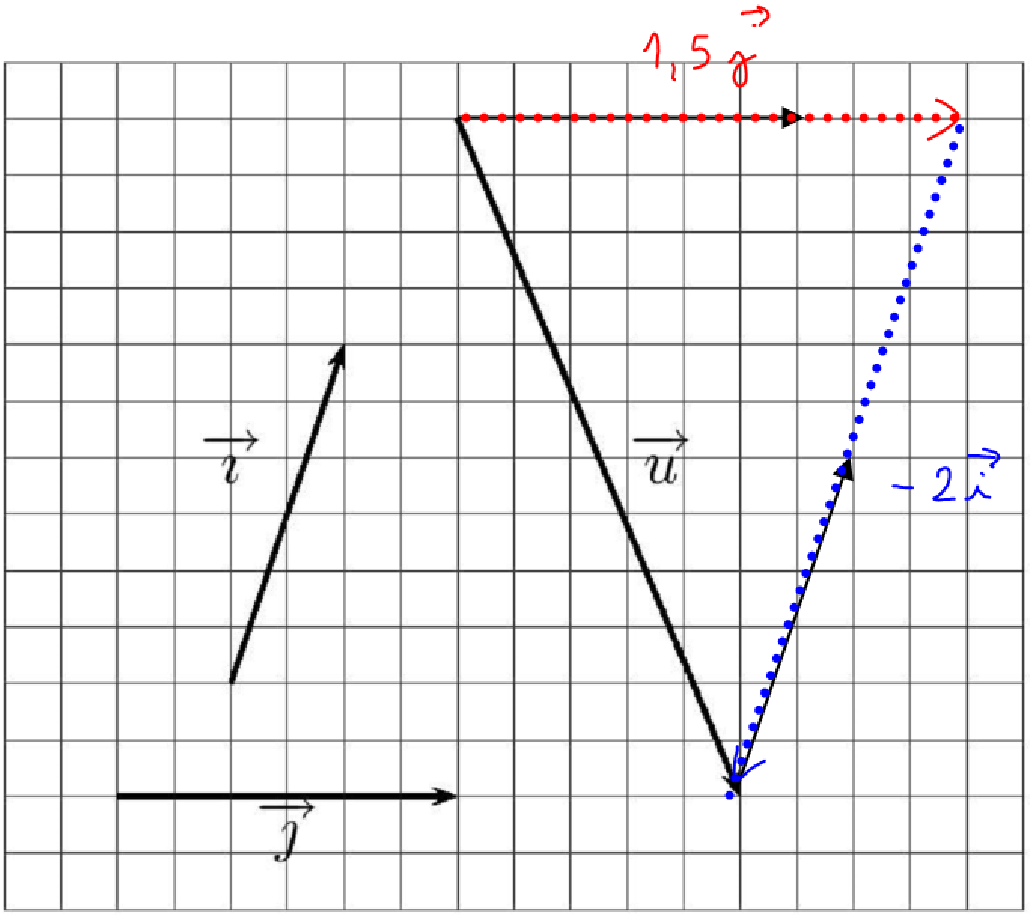
Théorème et définition :
Deux vecteurs **non colinéaires** du plan forment ce que l'on appelle une **base** du plan.
Dans cette base tout vecteur $\vec{u}$ du plan se décompose de manière unique sous la forme $\vec{u} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$ où $(x; y)$ est un couple de nombres réels.

On dira que le vecteur $\vec{u}$ a pour **coordonnées** x et y dans la base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$. On notera $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Par exemple, si $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$ est une base du plan, alors :

- $\vec{u} = 5\,\vec{\imath} - \vec{\jmath} \iff \vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$
- $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \vec{v} = -2\,\vec{\imath} + 3\,.\,\vec{\jmath}$
- $\vec{\imath}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{\jmath}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{0}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{\imath} = 1\vec{\imath} + 0\vec{\jmath}$ $\quad \vec{\jmath} = 0\vec{\imath} + 1\vec{\jmath}$



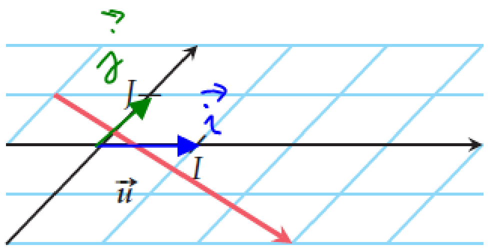
$\vec{u} = -2\vec{i} + 1{,}5\vec{j}$

donc dans la base $(\vec{i}\,;\vec{j})$

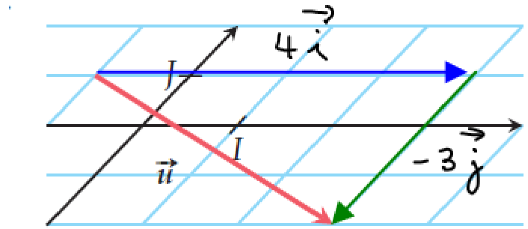
$\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1{,}5\end{pmatrix}$

Exercice d'application

Lire les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sur la figure ci-dessous.

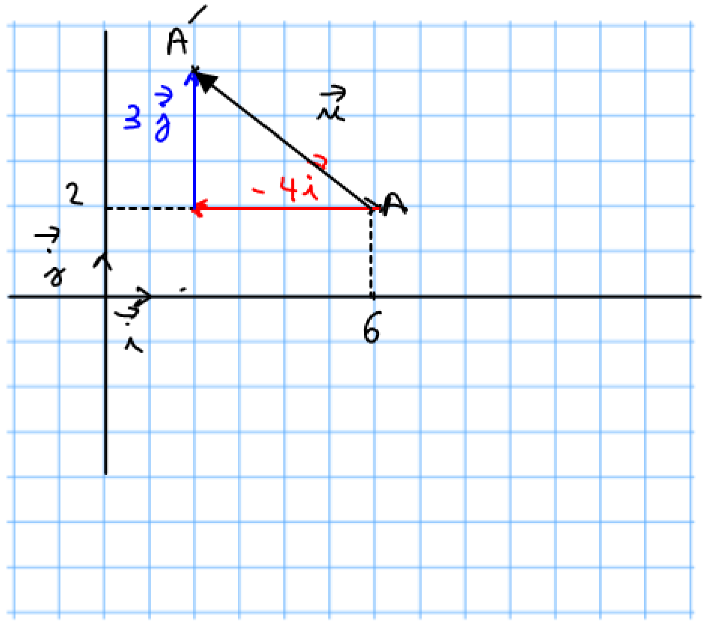


$\vec{u} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$



Exercice d'application

Dans un repère orthonormé, construire le représentant d'origine $A(6;2)$ du vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$.



$\overrightarrow{AA'}$ est le représentant d'origine A du vecteur $\vec{u}$

A' est l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$

Dans tout ce qui suit, le plan est muni d'une base $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$

Egalité de deux vecteurs :
Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, leurs coordonnées sont égales.
$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont égaux si, et seulement si, $x=x'$ et $y=y'$

Somme de deux vecteurs :
Soit $\vec{w}$ la somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Les coordonnées de $\vec{w}$ sont les sommes des coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$:
Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, alors $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\vec{w}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$.

Produit d'un vecteur par un réel :
Soit $\vec{u}$ un vecteur et k un nombre réel.
Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ alors le vecteur $\vec{w}=k\vec{u}$ a pour coordonnées $\vec{w}\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$.

Par exemple, si $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ alors :

- $-\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$, $\quad 5\vec{v}\begin{pmatrix}25\\15\end{pmatrix}$
- $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$, $\quad -\vec{u}+5\vec{v}\begin{pmatrix}24\\18\end{pmatrix}$

2 Colinéarité de deux vecteurs

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan, de coordonnées $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

Dire que ces deux vecteurs sont **colinéaires** revient à dire qu'il existe un réel k non nul tel que $\vec{v} = k\vec{u}$. ceci se traduit au niveau des coordonnées par $x' = kx$ et $y' = ky$; autrement dit, les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **proportionnelles**. Les produits en croix sont donc égaux : $xy' = x'y$.

Condition de colinéarité de deux vecteurs :
Les vecteurs non nuls $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si, $xy' = x'y$
si et seulement si, $xy' - x'y = 0$

Par exemple :

- Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\9\end{pmatrix}$ sont colinéaires car

  $\times(-3)$ $\times(-3)$

  d'une part $2 \times 9 = 18$ on a $\vec{v} = -3\vec{u}$
  d'autre part $-6 \times (-3) = 18$

- Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car

  d'une part $2 \times (-7) = -14$
  d'autre part $5 \times (-3) = -15$

3 Calcul vectoriel dans un repère du plan

Dans tout ce qui suit, le plan est muni d'un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$:

Coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$:
Si A a pour coordonnées $(x_A; y_A)$, et si B a pour coordonnées $(x_B; y_B)$,
alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$$