Calculer avec une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Une cantine sert des repas en nombre très important. Soit X la variable aléatoire qui donne le poids en grammes des rations de viande. On suppose que X suit la loi normale $\mathcal{N}(120, 225)$. Les probabilités seront arrondies au millième le plus proche.

1. **Quel est le poids moyen d'une ration de viande ?**

2. **Quelle est la probabilité pour que le poids d'une ration de viande soit compris entre 110 g et 135 g ?**

3. **Le 19 septembre, la cantine a servi 850 repas.**
À combien peut-on évaluer le nombre de rations de viande dont le poids dépassait 130 g ?

Solution

1. X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec $\mu = 120$, le poids moyen d'une ration est donc de 120 g.

2. X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec $\mu = 120$ et $\sigma^2 = 225$, d'où $\sigma = \sqrt{225} = 15$.
On doit calculer ici $P(110 < X < 135)$ à l'aide de la calculatrice :

Casio `NormCD(110,135,15,120)` Texas `NormalFRép(110,135,120,15)`

On obtient $P(110 \leqslant X \leqslant 135) \approx 0{,}589$.
La probabilité pour que le poids d'une ration soit compris entre 110 g et 135 g est donc 0,589.

3. Il faut commencer par calculer $P(X > 130)$: $P(X > 130) = 0{,}5 - P(120 < X < 130)$.

Casio `0.5–NormCD(120,130,15,120)` Texas `0.5–NormalFRép(120,130,120,15)`

On obtient $P(X > 130) \approx 0{,}252$. Le lycée a servi 850 repas, donc on peut évaluer à $850 \times 0{,}252$, soit 214, le nombre de rations de viande dont le poids dépassait 130 g.

Résoudre des équations avec une loi normale

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec $\mu = 90$ et $\sigma = 20$.
Les résultats seront arrondis au dixième le plus proche.

1. **Déterminer le réel k_1 tel que $P(X < k_1) = 0{,}98$.**

2. **Déterminer le réel k_2 tel que $P(X > k_2) = 0{,}60$.**

3. **Déterminer un intervalle I de centre μ tel que $P(X \in \mathrm{I}) = 0{,}85$.**

Solution

1. Avec la calculatrice : Casio `InvNormCD(0.98,20,90)` Texas `FracNormale(0.98,90,20)`.
On en déduit $k_1 \approx 131{,}1$.

2. $P(X > k_2) = 0{,}60$ équivaut à $1 - P(X \leqslant k_2) = 0{,}60$, soit à $P(X \leqslant k_2) = 0{,}40$.
On procède comme dans la question précédente. On trouve $k_2 \approx 84{,}9$.

3. Un intervalle I de centre μ est de la forme $[\mu - a\,;\mu + a]$, où a est un réel positif.
On cherche donc le réel a tel que $P(90 - a \leqslant X \leqslant 90 + a) = 0{,}85$.

$P(90 - a \leqslant X \leqslant 90 + a) = 0{,}85$ équivaut à $\left(\dfrac{90 - a - 90}{20} \leqslant \dfrac{X - 90}{20} \leqslant \dfrac{90 + a - 90}{20}\right) = 0{,}85$

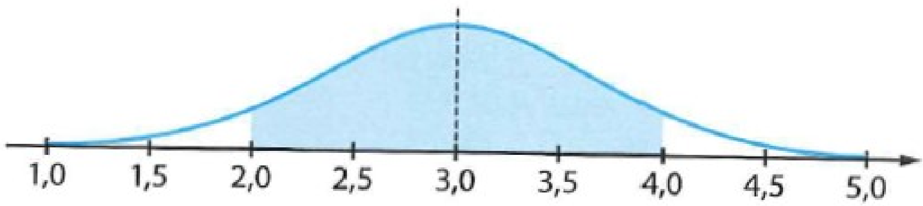
soit à $P\left(-\dfrac{a}{20} \leqslant Y \leqslant \dfrac{a}{20}\right) = 0{,}85$, où $Y = \dfrac{X - 90}{20}$ suit la loi normale centrée réduite.

Le réel a doit donc vérifier : $2\phi\left(\dfrac{a}{20}\right) - 1 = 0{,}85$, c'est-à-dire $\phi\left(\dfrac{a}{20}\right) = \dfrac{1 + 0{,}85}{2} = 0{,}925$.

Pour une calculatrice **Casio**, on saisit : `InvNormCD(0.925)`.
Pour une calculatrice **Texas**, on saisit : `FracNormale(0.925)`.

On en déduit $\dfrac{a}{20} \approx 1{,}44$ d'où $a \approx 28{,}8$. Donc $\mathrm{I} = [90 - 28{,}8\,; 90 + 28{,}8]$ soit $\mathrm{I} = [61{,}2\,; 118{,}8]$.

Déterminer un écart type



La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
La représentation graphique de la fonction de densité de probabilité de X est donnée ci-dessus.
Déterminer, à 0,01 près, les valeurs de μ et σ sachant que l'aire colorée vaut 0,88.

Solution :

Par lecture graphique, on a $\mu = 3$.

Déterminons σ.

Posons $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$. Alors $Z \sim \mathcal{N}(0\,;1)$

Par symétrie de la courbe de Gauss on a :

$$P(2 \leq X \leq 4) = 0,88 \Leftrightarrow P(X \leq 2) = \frac{1-0,88}{2} = 0,06$$

Or :

$$P(X \leq 2) = 0,06$$
$$\Leftrightarrow P(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{2-\mu}{\sigma}) = 0,06$$
$$\Leftrightarrow P(Z \leq \frac{2-\mu}{\sigma}) = 0,06$$

En remplaçant μ par sa valeur, il reste à trouver σ tel que : $P\left(Z \leq \dfrac{-1}{\sigma}\right) = 0,06$.

A l'aide de la fonction InvNorm de la calculatrice, on obtient :

$\dfrac{-1}{\sigma} = -1,55$ soit $\sigma = \dfrac{1}{1,55} = 0,64$

Déterminer les paramètres d'une loi normale

Énoncé

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
Déterminer les valeurs arrondies à l'entier le plus proche de μ et σ, sachant que $P(X < 55) = 0{,}7977$ et $P(X > 48) = 0{,}6306$.

Solution

$P(X < 55) = 0{,}7977$ équivaut à :

$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{55-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}7977$$

c'est-à-dire à $\phi\left(\frac{55-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}7977$ car $\frac{X-\mu}{\sigma}$ suit $\mathcal{N}(0, 1)$,

d'où $\frac{55-\mu}{\sigma} = 0{,}8334$

On en déduit $55 - \mu = 0{,}8334\sigma$ d'où $\mu + 0{,}8334\sigma = 55$.

$P(X > 48) = 0{,}6306$ équivaut à $1 - P(X \leqslant 48) = 0{,}6306$

soit à $P(X \leqslant 48) = 0{,}3694$. On en déduit : $\frac{48-\mu}{\sigma} = -0{,}3334$.

D'où $48 - \mu = -0{,}3334\sigma$ et $\mu - 0{,}3334\sigma = 48$.

On obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \mu + 0{,}8334\sigma = 55 \\ \mu - 0{,}3334\sigma = 48 \end{cases}$$

En soustrayant la seconde équation à la première, on obtient $1{,}1668\sigma = 7$ d'où $\sigma \approx 6$.

En reportant cette valeur dans la première équation, on obtient $\mu \approx 50$.

Notation

Pour simplifier les calculs avec la loi normale centrée réduite, on introduit la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\phi(t) = P(X \leqslant t).$$