Devoir maison

Dans une démarche écologique, une usine cherche à diminuer le volume de déchets issus de sa production avec l' objectif de rejeter moins de 25 000 tonnes de déchets par an.

En 2017, l'usine a rejeté 40 000 tonnes de déchets.

En 2018, les efforts entrepris par la direction de l'usine pour moderniser la ligne de production permettent de garantir chaque année une diminution de la quantité de déchets de 5%.
La nouvelle ligne de production et le développement continu de l'activité de l'usine engendrent néanmoins chaque année 200 tonnes de déchets supplémentaires.

Pour tout entier naturel n, on note donc d_n la quantité de déchets produite l'année 2017 + n.

1. a. Donner les valeurs de d_0, d_1 , d_2 .
   b. Justifier que pour tout entier naturel n :
   $$d_{n+1} = 0,95\, d_n + 200$$
2. Soit (r_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $r_n = d_n - 4000$
   a. Démontrer que la suite (r_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b. Pour tout nombre entier naturel n, exprimer r_n en fonction de n.
   En déduire pour tout entier naturel n l'expression de d_n en fonction de n.
   c. La quantité de déchets diminue-t-elle d'une année sur l'autre ? Justifier.
   d. Déterminer la limite de la suite (d_n) lorsque n tend vers l'infini.
   e. Quelle quantité de déchets rejetés par l'usine, exprimée en kilogrammes peut-on estimer pour l'année 2025 ?
3. A partir de quelle année l'entreprise aura-t-elle atteint son objectif ?

CORRECTION

1. Calculer d_0 correspond à la quantité de déchets produite l'année 2017 + 0 soit 2017.
   a. On a donc $d_0 = 40\,000$

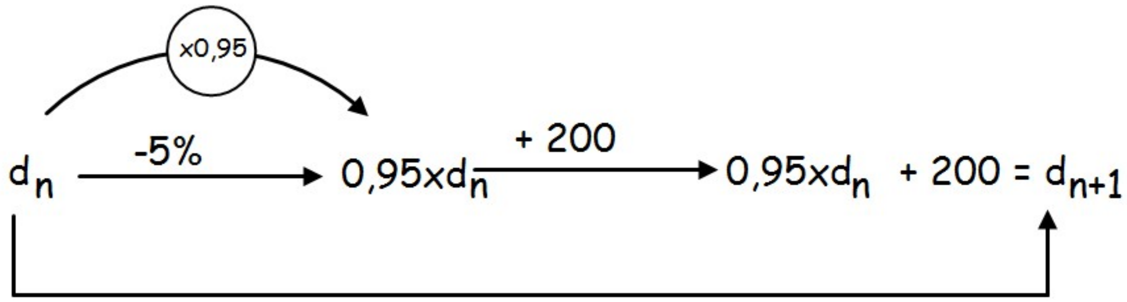
Diminuer de 5% revient à multiplier par 0,95.
$40000 \times 0,95 = 38000$
38 000 + 200 = 38200
$d_1 = 38200$

De la même façon on a :
$38200 \times 0,95 = 36290$
36290 + 200 = 36490
$d_2 = 36490$

b. Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$d_{n+1} = 0,95 d_n + 200$$

D'une année n quelconque à l'année $n+1$, le mécanisme est le suivant :



Le schéma précédent met donc en évidence la forme récurrente de la suite (d_n) et on a bien pour tout entier naturel n :

$$d_{n+1} = 0,95d_n + 200$$

2. Soit (r_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$r_n = d_n - 4000$$

a. Montrer que (r_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

(r_n) est géométrique si et seulement s'il existe un réel q tel pour tout entier naturel n :

$$r_{n+1} = q \times r_n$$

Pour tout entier n,

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= d_{n+1} - 4000 \\ &= (0,95d_n + 200) - 4000 \\ &= 0,95d_n - 3800 \\ &= 0,95(r_n + 4000) - 3800 \\ &= 0,95r_n \end{aligned}$$

Ainsi, (r_n) est une suite géométrique de raison 0,95et de premier terme $r_0 = d_0 - 4000$ =36000.

On peut donc donner la forme explicite de la suite.

b. En déduire, pour tout entier n, l'expression de r_n en fonction de n.

(r_n) est une suite géométrique de raison 0,95et de premier terme r_0 =36000, donc pour tout entier n,

$$r_n = r_0 \times q^n = 36000 \times 0,95^n$$

On a de plus pour tout entier naturel n $d_n = r_n + 4000 = 36000 \times 0,95^n + 4000$

c. Etude du sens de variation de la suite (d_n)

Pour tout entier naturel n on a :

$$\begin{aligned} d_{n+1} - d_n &= 36000 \times 0,95^{n+1} + 4000 - (36000 \times 0,95^n + 4000) \\ &= 36000 \times 0,95^{n+1} - 36000 \times 0,95^n \\ &= 36000 \times 0,95^n \times 0,95 - 36000 \times 0,95^n \\ &= 36000 \times 0,95^n \times (0,95 - 1) \\ &= 36000 \times 0,95^n \times (-0,05) < 0 \end{aligned}$$

Donc (d_n) est décroissante : ce qui prouve que la quantité de déchets diminue d'année en année.

d. Calculer la limite de la suite (d_n).

0,95 < 1 donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,95^{n1} = 0$ par produit, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 36000 \times 0,95^n = 36000 \times 0 = 0$.

Par somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} d_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 4000 + 36000 \times 0,95^n = 4000 + 0 = 4000$

e. L'année 2017 correspond au rang 0 ; de plus on a 2025 = 2017 + 8.

En 2025, le rang sera donc $n = 8$.

$d_8 = 36000 \times 0,95^8 + 4000 \approx 27883,1355$

En 2025, la quantité de déchets rejetés, exprimée en kilogrammes, sera de l'ordre de 2 788 314 kg.

3. A l'aide d'un tableau de valeurs dressé à la calculatrice, on détermine le plus petit rang à partir duquel $d_n \leq 25000$

On a : $d_{10} = 25554$

$d_{11} = 24476$

2017 + 11 = 2028

C'est donc à partir de 2028 que l'entreprise atteindra son objectif écologique.