Chapitre 5 :
VARIABLES ALÉATOIRES

En 1654, *Blaise Pascal* (1623 ; 1662) entretient avec *Pierre de Fermat* (1601 ; 1665) des correspondances sur le thème des jeux de hasard et d'espérance de gain qui les mènent à exposer une théorie nouvelle : les calculs de probabilités.
Ils s'intéressent à la résolution de problèmes de dénombrement comme par exemple celui du *Chevalier de Méré* :
« Comment distribuer équitablement la mise à un jeu de hasard interrompu avant la fin ? »

I. Variable aléatoire et loi de probabilité

1) Variable aléatoire

Exemple : **Vidéo** **cliquer sur ce lien**

Soit l'expérience aléatoire : "On lance un dé à six faces et on regarde le résultat."
L'ensemble de toutes les issues possibles est Ω = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}
Ω s'appelle l'univers des possibles.

On considère le jeu suivant :
- Si le résultat du lancer est pair, on gagne 2 €.
- Si le résultat du lancer est 1, on gagne 3 €.
- Si le résultat du lancer est 3 ou 5, on perd 4 €.

On peut ainsi définir une variable aléatoire *X* sur Ω = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} correspondant au gain obtenu à l'issue d'un jeu.
Cette valeur aléatoire peut donc prendre les valeurs 2, 3 ou –4.

Pour les issues 2, 4 ou 6, on a : $X = 2$ le gain obtenu pour ces issues est de 2 €.
Pour l'issue 1, on a : $X = 3$ le gain obtenu pour cette issue est de 3 €.
Pour les issues 3 et 5, on a : $X = -4$. le gain obtenu pour ces issues est de –4 €.

On note $X \in \{2;3;-4\}$

Définition : Une variable aléatoire *X* associe un unique nombre réel à chaque issue de l'univers Ω. C'est donc une fonction.

2) Loi de probabilité

Exemple : On considère la variable aléatoire *X* définie dans l'exemple précédent.

Chaque issue du lancer de dé est équiprobable et égale à $\frac{1}{6}$.

La probabilité que la variable aléatoire prenne la valeur 2 est égale à $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$.

On note : P(X = 2) = $\frac{1}{2}$.

De même : P(X = 3) = $\frac{1}{6}$ et P(X = –4) = $\frac{1}{6}$ + $\frac{1}{6}$ = $\frac{1}{3}$.

On peut résumer les résultats dans un tableau :

x_i	–4	2	3
P(X = x_i)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Ce tableau résume la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Définition : La **loi de probabilité** de X est donnée par toutes les probabilités P(X = x_i).

Remarques :
- P(X = x_i) peut se noter p_i.
- $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

Exemple :
Dans l'exemple traité plus haut on a :
$p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1$.

Méthode : Déterminer une loi de probabilité

Application :

Soit l'expérience aléatoire : "On tire une carte dans un jeu de 32 cartes."
On considère le jeu suivant :
- Si on tire un cœur, on gagne 2 €.
- Si on tire un roi, on gagne 5 €.
- Si on tire une autre carte, on perd 1 €.

On appelle X la variable aléatoire qui, à une carte tirée, associe un gain ou une perte.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.
2) Calculer P(X ≥ 5) et interpréter le résultat.

Solution : **Vidéo** **cliquer sur ce lien**

1) La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 2, 5, –1 mais aussi 7.
En effet, si on tire le roi de cœur, on gagne 5(roi) + 2(cœur) = 7 €.

On note $X \in \{-1; 2; 5; 7\}$

- Si la carte tirée est un cœur (autre que le roi de cœur), X = 2 et P(X = 2) = $\frac{7}{32}$.
- Si la carte tirée est un roi (autre que le roi de cœur), X = 5 et P(X = 5) = $\frac{3}{32}$.
- Si la carte tirée est le roi de cœur, *X* = 7 et P(X = 7) = $\frac{7}{32}$.
- Si la carte tirée n'est ni un cœur, ni un roi, *X* = –1 et P(X = –1) = $\frac{21}{32}$.

La loi de probabilité de X est donc :

x_i	–1	2	5	7
p_i	$\frac{21}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

On constate que : $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{21}{32} + \frac{7}{32} + \frac{3}{32} + \frac{1}{32} = 1$

2) $P(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 7) = \frac{3}{32} + \frac{1}{32} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

La probabilité de gagner plus de 5 € est égale à $\frac{1}{8}$.

II. Espérance

Méthode : Calculer l'espérance d'une loi de probabilité

Vidéo [cliquer sur ce lien]

Dans le jeu de la "Méthode" du paragraphe précédent, calculer l'espérance de la loi de probabilité de *X* et interpréter le résultat.

Définition : L'**espérance mathématique** de la loi de probabilité de *X* est :

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n$$

$$E(X) = \frac{21}{32} \times (-1) + \frac{7}{32} \times 2 + \frac{3}{32} \times 5 + \frac{1}{32} \times 7 = \frac{15}{32}$$

L'espérance est égale à $\frac{15}{32} \approx 0,5$ signifie qu'en jouant, on peut espérer gagner environ 0,50€.

Remarque :
L'espérance est donc la moyenne que l'on peut espérer si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois.

Exercice :

Un sac contient les jetons numérotés ci-dessous.

On pioche au hasard un jeton du sac.

Un jeu est organisé ainsi : pour une mise de trois euros, on gagne autant d'euros qu'indiqué sur le jeton. On définit la variable aléatoire X qui lui associe le bénéfice d'un joueur.

a. Montrer que X prend des valeurs comprises entre -2 et 3.

b. Déterminer la loi de probabilité de X.

c. Calculer $E(X)$ et interpréter ce résultat.

Solution :

Vidéo [cliquer sur ce lien]