

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

I. Calculs à l'aide d'un tableau croisé

1) Exemple avec un exercice :

 Vidéo <https://youtu.be/7tS60nk6Z2I>

Un laboratoire pharmaceutique a réalisé des tests sur 800 patients atteints d'une maladie. Certains sont traités avec le médicament A, d'autres avec le médicament B. Le tableau présente les résultats de l'étude :

| | Médicament A | Médicament B | Total |
|-----------|--------------|--------------|-------|
| Guéri | 383 | 291 | 674 |
| Non guéri | 72 | 54 | 126 |
| Total | 455 | 345 | 800 |

Organisons l'information :

Soit Ω l'univers de cette expérience statistique :

Card (Ω) = 800

On considère les événements suivants :

A : «Le patient a pris le médicament A »

B : «Le patient a pris le médicament B »

On a donc $B = \bar{A}$

Card A = 455 ; card B = card \bar{A} = card Ω – card A = 345

G : «Le patient est guéri »

\bar{G} : «Le patient n'est pas guéri »

Card G = 674

card \bar{G} = card Ω – card G = 800 – 674 = 126

Questions :

1) On choisit au hasard un patient :

Calculer :

a) $p(A)$

b) $p(G)$

Solution :

$$a) p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{455}{800} = \frac{91}{160} = 0,56875$$

$$b) p(G) = \frac{\text{card } G}{\text{card } \Omega} = \frac{674}{800} = \frac{337}{400} = 0,8425$$

2) Décrire par une phrase les événements suivants et calculer leur probabilité :

a) $G \cap A$

b) $\bar{G} \cap A$

Solution :

a) $G \cap A$: « le patient est guéri et a pris le médicament A »

$$p(G \cap A) = \frac{\text{card } (G \cap A)}{\text{card } \Omega} = \frac{383}{800} = 0,47875$$

b) $\bar{G} \cap A$: « le patient n'est pas guéri et a pris le médicament A »

$$p(\bar{G} \cap A) = \frac{\text{card } (\bar{G} \cap A)}{\text{card } \Omega} = \frac{72}{800} = \frac{9}{100} = 0,09$$

3) On choisit maintenant au hasard un patient guéri.

Calculer la probabilité que le patient ait pris le médicament A.

Solution :

On cherche à calculer la probabilité que le patient ait pris le médicament A **sachant qu'il est guéri**.

| | Médicament A | Médicament B | Total |
|-----------|--------------|--------------|-------|
| Guéri | 383 | 291 | 674 |
| Non guéri | 72 | 54 | 126 |
| Total | 455 | 345 | 800 |

On regarde uniquement **la ligne des patients guéris**.

La probabilité que le patient ait pris le médicament A **sachant qu'il est guéri** se note

$$p_G(A) \text{ et est égale à } p_G(A) = \frac{383}{674} = \frac{\text{card}(A \cap G)}{\text{card } G} \approx 0,57.$$

4) On choisit maintenant au hasard un patient traité par le médicament B.

Calculer la probabilité que le patient soit guéri.

Solution :

On cherche à calculer la probabilité que le patient soit guéri **sachant qu'il** a pris le médicament B.

| | Médicament A | Médicament B | Total |
|-----------|--------------|--------------|-------|
| Guéri | 383 | 291 | 674 |
| Non guéri | 72 | 54 | 126 |
| Total | 455 | 345 | 800 |

On regarde uniquement **la colonne du médicament B**.

La probabilité que le patient soit guéri **sachant qu'il** a pris le médicament B se note

$$p_B(G) \text{ et est égale à } p_B(G) = \frac{291}{345} = \frac{\text{card}(G \cap B)}{\text{card } B} = \frac{97}{115} \approx 0,84 \quad .$$

2) DéfinitionDéfinition :

On appelle **probabilité conditionnelle de B sachant A**, notée $P_A(B)$, la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé.

Propriété : $p_A(B) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card } A}$

II. Application

Exemple :  Vidéo <https://youtu.be/FR49wu-pVmE>

Un sac contient 50 boules, dont :

- 20 boules rouges,
- 30 boules noires,

où il est marqué soit "Gagné" ou soit "Perdu".

- Sur 15 boules rouges, il est marqué Gagné.
- Sur 9 boules noires, il est marqué Gagné.

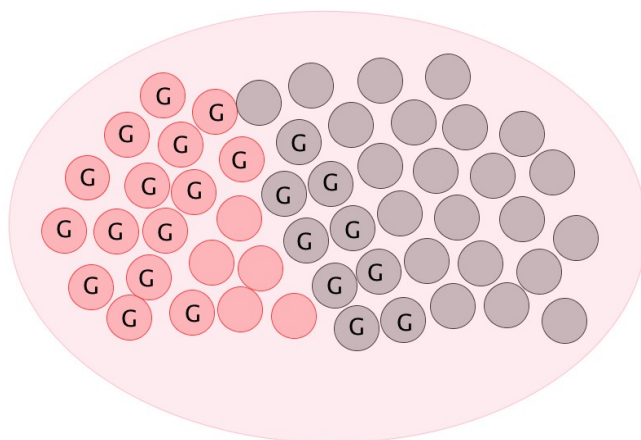
On tire au hasard une boule dans le sac.
Soit R l'événement : « On tire une boule rouge ».

Soit G l'événement : « On tire une boule marquée Gagné »

Questions :

1) Calculer la probabilité de tirer une boule marquée Gagné sachant qu'elle est rouge.

2) Calculer la probabilité de tirer une boule marquée Gagné sachant qu'elle est noire.



Solution :

On peut éventuellement organiser l'information à l'aide d'un tableau croisé

| | G | \bar{G} | Total |
|-----------|----|-----------|-------|
| R | 15 | 5 | 20 |
| \bar{R} | 9 | 21 | 30 |
| Total | 24 | 26 | 50 |

On rappelle que cardinal de A, noté $\text{card } A$, désigne le nombre d'issues qui réalisent l'événement A.

1) Calculer la probabilité de tirer une boule marquée Gagné sachant qu'elle est rouge.

On s'intéresse uniquement à la ligne surlignée en rose.

Le sac contient 20 boules rouges, donc $\text{Card } R = 20$.
Sur les 20 boules rouges, 15 portent la mention "Gagné"

$$\text{On a donc } p_R(G) = \frac{15}{20}$$

❖ Soit $R \cap G$ l'événement : « On tire une boule rouge marquée Gagné ».

$$\text{On a donc bien } p_R(G) = \frac{15}{20} = \frac{\text{card } (R \cap G)}{\text{card } R} = 0,75$$

2) Calculer la probabilité de tirer une boule marquée Gagné sachant qu'elle est noire.

On s'intéresse uniquement à la ligne surlignée en bleu.

Le sac contient 30 boules noires, donc $\text{card } \bar{R} = 30$.
Sur les 30 boules noires, 9 portent la mention "Gagné"

La probabilité qu'on tire une boule marquée Gagné sachant qu'elle est noire est donc :

$$p_{\bar{R}}(G) = \frac{9}{30} = 0,3$$

❖ Soit $\bar{R} \cap G$ l'événement : « On tire une boule noire marquée Gagné ».

$$\text{On a donc bien } p_{\bar{R}}(G) = \frac{\text{card } (\bar{R} \cap G)}{\text{card } \bar{R}} = \frac{9}{30} = 0,3$$