Activité d'approche - Chapitre 2.

Activité 1 La méthode d'Al-Khawarizmi

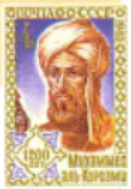
Objectif

Découvrir une méthode de résolution d'une équation du second degré.

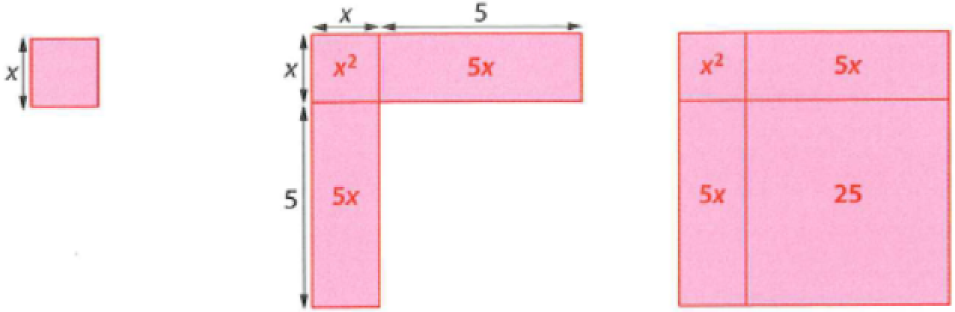
Cours 1
Équations du second degré

Point Histoire

Al-Khawarizmi (783-850), est un mathématicien perse dont les écrits ont permis l'introduction de l'algèbre en Europe. Il est à l'origine de l'utilisation des chiffres arabes et des mots « algorithme » et « algèbre ».



1. On se propose de résoudre l'équation du second degré $x^2 + 10x = 39$ (E).
Voici la méthode proposée par le mathématicien perse **Al-Khawarizmi.**
Étape ① : on suppose que x est positif et on construit un carré de côté x.
Étape ② : on borde ce carré de deux rectangles dont l'aire vaut $\frac{10}{2} \times x$, on obtient ainsi 5 comme autre dimension.
Étape ③ : on complète alors le grand carré.



Étape ① Étape ② Étape ③

a. Exprimer l'aire du carré de deux façons différentes et en déduire que :
$$x^2 + 10x = (x + 5)^2 - 25.$$
b. En déduire que résoudre l'équation (E) revient à résoudre l'équation $(x + 5)^2 = 64$.
Déterminer alors la solution positive de l'équation (E). Al-Khawarizmi ne parle pas de l'autre racine de cette équation, car pour lui 64 n'a qu'une racine carrée : 8.
c. Déterminer l'autre solution de l'équation (E).

2. Utiliser cette méthode pour résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
a. $x^2 + 12x = 45$. **b.** $x^2 + 4x - 32 = 0$.

1. on nommera "grand carré" le carré colorié entièrement en rose et "carré blanc" le carré intérieur.

L'aire du carré blanc est 25.

Le grand carré à pour côté $x+5$, son aire est donc $(x+5)^2$

On considère maintenant l'aire de la partie en forme de L renversé.

L'aire du grand carré est égale à la somme de l'aire du "L" et de l'aire du carré blanc. Or le "L" a pour surface $x^2+5x+5x$

on obtient donc :
$$(x+5)^2 = (x^2+10x)+25$$
$$(x+5)^2-25 = x^2+10x$$

en lisant l'égalité à l'envers on a donc : $x^2+10x = (x+5)^2-25$

b) On a à résoudre (E) : $x^2+10x = 39$

on obtient ensuite $(x+5)^2 - 25 = 39$

$\iff (x+5)^2 = 39 + 25$

$\iff (x+5)^2 = 64$

$\downarrow$

posons $X = (x+5)$

on a alors $X^2 = 64$

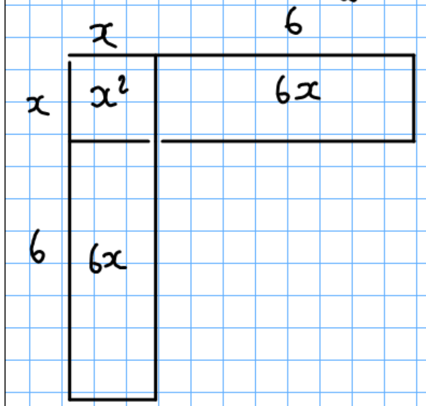
$\iff X = +8$ $\quad$ (ou $X = -8$)

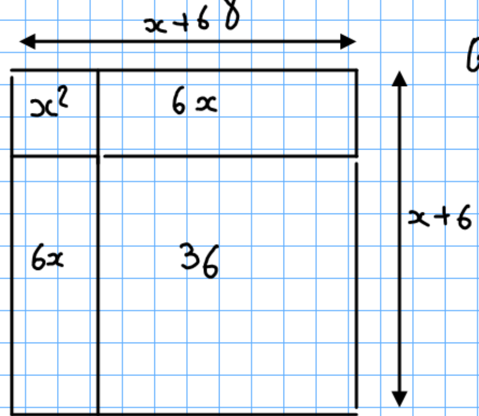
$\iff x+5 = 8$ $\quad$ (ou $x+5 = -8$)

$\iff x = 8 - 5$ $\quad$ (ou $x = -8-5$)

$\iff x = 3$ $\quad$ (ou $x = -13$)

Exprimons dans chaque cas l'aire de la partie en forme de L :
C'est la différence entre l'aire du grand carré et celle du carré blanc.





On a
$x^2+12x=(x+6)^2-36$

(E) $x^2+12x=45$

$\iff (x+6)^2-36=45$

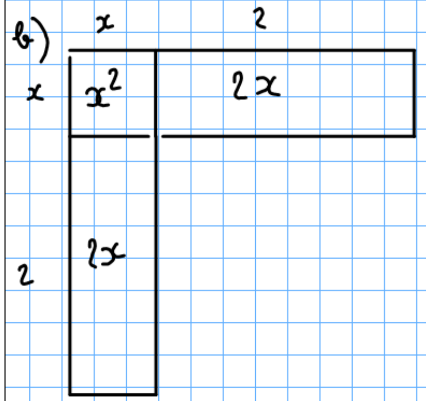
$\iff (x+6)^2=45+36$

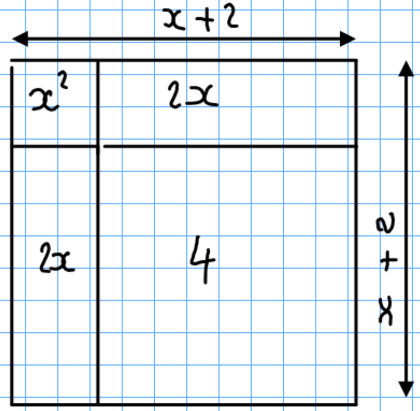
$\iff (x+6)^2=81$ Posons $X=x+6$ $X^2=81 \iff X=+9$ ou $X=-9$

$\iff x+6=9$ ou $x+6=-9$

$\iff x=3$ $x=-15$

b)





$x^2+4x=(x+2)^2-4$

(E): $x^2+4x-32=0$

$\iff (x+2)^2-4-32=0$

$\iff (x+2)^2-36=0$

(E) $\iff (x+2)^2=36$

En posant $X=x+2$

(E) $\iff X^2=36 \iff X=+6$ ou $X=-6$

$\iff x+2=+6$ ou $x+2=-6$

$\iff x=+6-2$ ou $x=-6-2$

$x^2+4x-32=0$: $\mathcal{S}=\{-8;4\}$

Activité n° 3 page 58 pour mardi 12H45