Chapitre 2 : Polynômes du second degré

I Les différentes formes d'une fonction polynôme du second degré

1. Définition :

Dire qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction polynôme de degré 2 (ou trinôme) signifie qu'il existe des nombres réels a, b, c (avec $a \neq 0$) tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = ax^2 + bx + c$

Il s'agit de la forme développée de $f(x)$.

2. Forme canonique

a) La forme canonique de $f(x)$ est du type $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

on montre que $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$

Preuve : • $f(\alpha) = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c$

$$= a \times \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2 \times 2}{2a \times 2} + c$$

$$f(\alpha) = \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + c = \frac{-b^2}{4a} + c$$

par ailleurs, avec la forme canonique on obtient :

$$f(\alpha) = a(\alpha - \alpha)^2 + \beta = a \times 0^2 + \beta = \beta.$$

On a donc $\beta = \dfrac{-b^2}{4a} + c = f(\alpha)$

- $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$= a\left(x^2 + \frac{bx}{a}\right) + c$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$= a\left[x - \left(\frac{-b}{2a}\right)\right]^2 + \left(\frac{-b^2}{4a} + c\right)$$

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

b) Dans un repère, la courbe représentative de la fonction f est appelée parabole

Le point $S(\alpha ; \beta)$ est appelé sommet de la parabole et la droite verticale d'équation $x = \alpha$ est l'axe de symétrie de la parabole.

Exemple : $f(x) = 0,5x^2 - 2x + 1$ f est une fonction polynôme du second degré.

$a = 0,5$ $b = -2$ $c = 1$

la forme canonique est $a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$ $\beta = f(\alpha)$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{+2}{2 \times 0,5} = \frac{2}{1} = 2$$

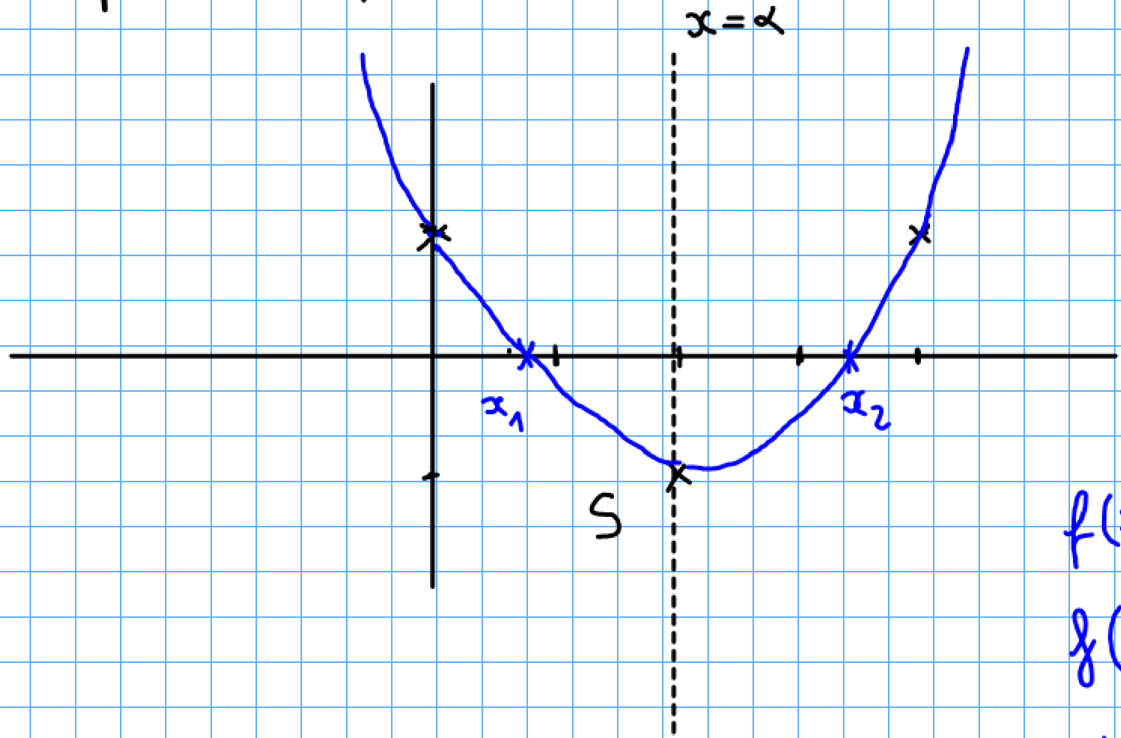
$$\beta = f(\alpha) = f(2) = 0,5 \times 2^2 - 2 \times 2 + 1$$

$$= 0,5 \times 4 - 4 + 1$$

$$= 2 - 4 + 1 = -1$$

$$f(x) = 0,5(x-2)^2 - 1$$

La parabole représentative de f dans un repère a pour sommet $S(\underset{\alpha}{2} ; \underset{\beta}{-1})$



$f(0) = 1 = c$

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(0) = a \times 0^2 + b \times 0 + c = c$

ici $c = 1$.