Chapitre 2 : Polynômes du second degré

I Les différentes formes d'une fonction polynôme du second degré

1. Définition :

Dire qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction polynôme de degré 2 (ou trinôme) signifie qu'il existe des nombres réels a, b, c (avec $a \neq 0$) tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = ax^2 + bx + c$

Il s'agit de la forme développée de $f(x)$.

2. Forme canonique

a) La forme canonique de $f(x)$ est du type $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

on montre que $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$

Preuve : • $f(\alpha) = f\left(\frac{-b}{2a}\right) = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c$

$$= a \times \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2 \times 2}{2a \times 2} + c$$

$$f(\alpha) = \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + c = \frac{-b^2}{4a} + c$$

par ailleurs, avec la forme canonique on obtient :

$$f(\alpha) = a(\alpha - \alpha)^2 + \beta = a \times 0^2 + \beta = \beta.$$

On a donc $\beta = \frac{-b^2}{4a} + c = f(\alpha)$

- $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$= a\left(x^2 + \frac{bx}{a}\right) + c$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$= a\left[x - \left(\frac{-b}{2a}\right)\right]^2 + \left(\frac{-b^2}{4a} + c\right)$$

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

b) Dans un repère, la courbe représentative de la fonction f est appelée parabole

Le point $S(\alpha\,;\beta)$ est appelé sommet de la parabole et la droite verticale d'équation $x=\alpha$ est l'axe de symétrie de la parabole.

Exemple : $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 1$ f est une fonction polynôme du second degré.

$a = 0{,}5 \quad b = -2 \quad c = 1$

la forme canonique est $a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$ $\beta = f(\alpha)$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{+2}{2\times 0{,}5} = \frac{2}{1} = 2$$

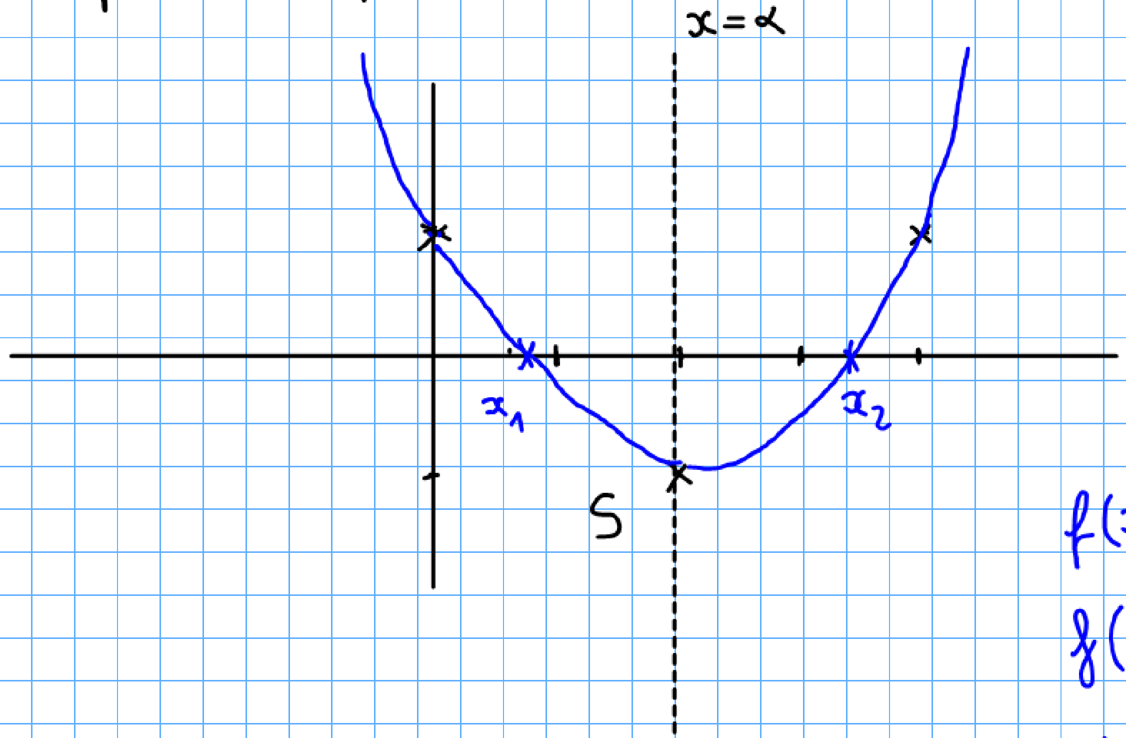
$$\beta = f(\alpha) = f(2) = 0{,}5\times 2^2 - 2\times 2 + 1$$

$$= 0{,}5\times 4 - 4 + 1$$

$$= 2 - 4 + 1 = -1$$

$$f(x) = 0{,}5(x-2)^2 - 1$$

La parabole représentative de f dans un repère a pour sommet $S(\underbrace{\alpha}_{\alpha} ; \underbrace{-1}_{\beta})$



$f(0) = 1 = c$

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(0) = a \times 0^2 + b \times 0 + c = c$

ici $c = 1$.

3) Forme factorisée

la forme factorisé de $f(x) = ax^2 + bx + c$ est $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

x_1 et x_2 sont les racines du trinôme ou encore solutions de l'équation

$f(x) = 0$. En effet $f(x_1) = 0$; $f(x_2) = 0$

Déterminatio des racines x_1 et x_2 :

D'après la forme canonique $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$f(x) = a\,(x-\alpha)^2+\beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha) = -\dfrac{b^2}{4a}+c$

ainsi $f(x) = a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a}+c$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \underbrace{\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)}_{\text{réduisons au même dénominateur}}\right]$$

$\times 4a$

$\times 4a$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right]$$

La quantité b^2-4ac est appelée discriminant du trinôme, et on la note Δ

$$\boxed{\Delta = b^2-4ac}$$

$f(x)$ ne se factorise à l'aide de l'identité remarquable A^2-B^2 que si et seulement si la quantité $\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ peut être assimilée à B^2.

Pour cela, il faut et il suffit que $\underset{\Delta}{\underset{\uparrow}{b^2 - 4ac}} \geqslant 0$. (un carré est toujours positif ou nul).

On distingue donc 3 cas :

- $\Delta < 0$: le trinôme ne se factorise pas ; il n'y a aucune racine réelle.
- $\Delta > 0$: on effectue la transformation d'écriture suivante afin de mettre en évidence l'identité remarquable $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

$$f(x) = a\Big[\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{A^2} - \underbrace{\frac{\Delta}{4a^2}}_{B^2}\Big]$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$= a\Big[x - \underbrace{\left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)}_{x_1}\Big]\Big[x - \underbrace{\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)}_{x_2}\Big]$$

$$\boxed{x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

• si $\Delta = 0$: $b^2 - 4ac = 0$; la forme factorisée précédente nous donne : $x_1 = -\frac{b}{2a}$ $x_2 = -\frac{b}{2a}$

Les 2 racines sont confondues : $x_0 = \frac{-b}{2a}$ est appelé racine double

le trinôme se factorise en $f(x) = a(x - x_0)^2$ c'est une identité remarquable.

II Équations et inéquations du second degré

1. Équation $ax^2 + bx + c = 0$

• 1er cas : si $\Delta > 0$ $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

D'après la règle du produit nul, un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

$a \neq 0$ on a donc $(x - x_1) = 0$ ou $(x - x_2) = 0$

$x = x_1$ $x = x_2$

Ccl : $\boxed{f(x) = 0 : \mathcal{S} = \{x_1 ; x_2\}}$ 2 solutions distinctes

• 2ᵉ cas : si $\Delta = 0$

$f(x) = a(x - x_0)^2$

$f(x) = 0 \iff a(x - x_0)^2 = 0$

$\iff (x - x_0) = 0$

$\iff x = x_0$: une solution double

• 3ᵉ cas : si $\Delta < 0$ $f(x)$ ne se factorise pas, il n'y a pas de solution à l'équation $f(x) = 0$.