

Chapitre 2: Polynômes du second degré

I Les différentes formes d'une fonction polynôme du second degré

1. Definition: Dire qu'une fonction f définie sur \mathbb{R} est une fonction polynôme de degré 2 (ou trinôme) signifie qu'il existe des nombres réels a, b, c (avec $a \neq 0$) tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = ax^2 + bx + c$

Il s'agit de la forme développée de $f(x)$.

2. Forme canonique

a) La forme canonique de $f(x)$ est du type $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

on montre que $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$

Preuve: $f(\alpha) = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c$

$$= a \times \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2 \times 2}{2a \times 2} + c$$

$$f(\alpha) = \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + c = \frac{-b^2}{4a} + c$$

par ailleurs, avec la forme canonique on obtient :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta = a \times 0^2 + \beta = \beta.$$

On a donc $\beta = \frac{-b^2}{4a} + c = f(\alpha)$

- $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$= a\left(x^2 + \frac{bx}{a}\right) + c$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$= a\left[x - \left(\frac{-b}{2a}\right)\right]^2 + \left(\frac{-b^2}{4a} + c\right)$$

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

b) Dans un repère, la courbe représentative de la fonction f est appelée parabole

Le point $S(\alpha; \beta)$ est appelé sommet de la parabole et la droite verticale d'équation $x = \alpha$ est l'axe de symétrie de la parabole.

Exemple: $f(x) = 0,5x^2 - 2x + 1$ f est une fonction polynôme de second degré. $a = 0,5$ $b = -2$ $c = 1$

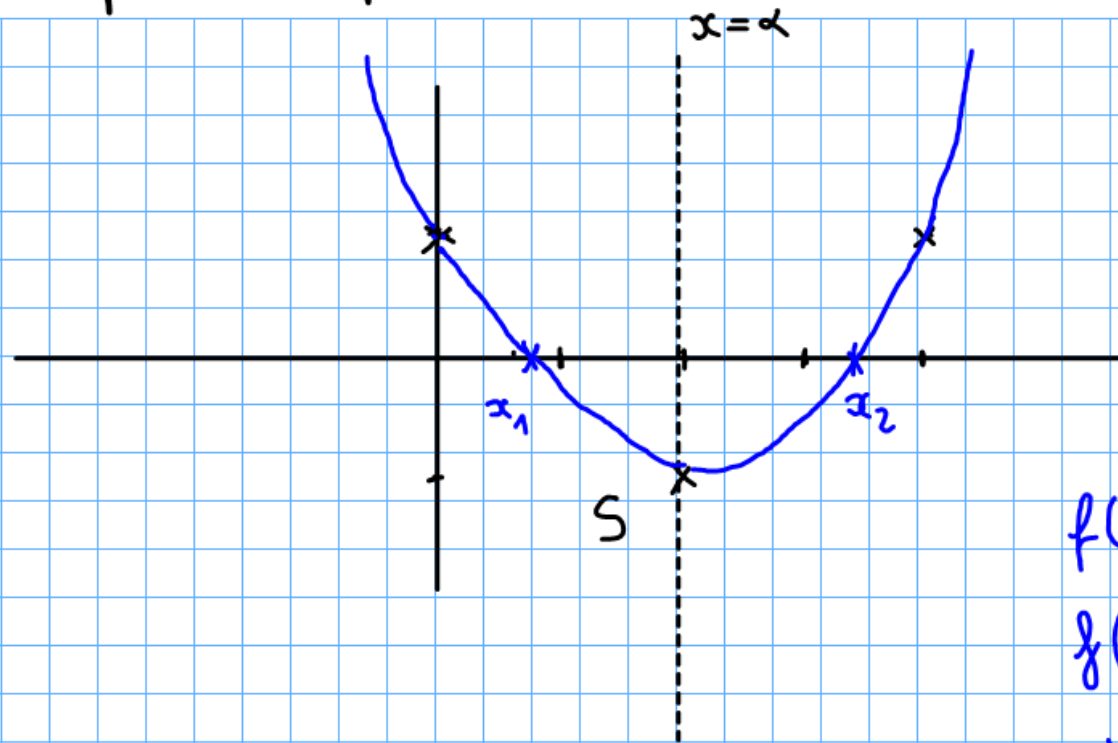
la forme canonique est $a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$ $\beta = f(\alpha)$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{+2}{2 \times 0,5} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\begin{aligned} \beta = f(\alpha) &= f(2) = 0,5 \times 2^2 - 2 \times 2 + 1 \\ &= 0,5 \times 4 - 4 + 1 \end{aligned}$$

$$f(x) = 0,5(x - 2)^2 - 1 = 2 - 4 + 1 = -1$$

La parabole représentative de f dans un repère a pour sommet $S(\alpha; -1)$



$$f(0) = 1 = c$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(0) = a \times 0^2 + b \times 0 + c = c$$

$$\text{ici } c = 1.$$

3) Forme factorisée

la forme factorisée de $f(x) = ax^2 + bx + c$ est $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

x_1 et x_2 sont les racines du trinôme ou encore solutions de l'équation

$$f(x) = 0 \quad . \quad \text{En effet } f(x_1) = 0 \quad ; \quad f(x_2) = 0$$

Détermination des racines x_1 et x_2 :

D'après la forme canonique $f(x)$ peut s'écrire sous la forme:

$$f(x) = a \left(x - \alpha \right)^2 + \beta \quad \text{avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et } \beta = f(\alpha) = -\frac{b^2}{4a} + c$$

ainsi $f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$

$$= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right]$$

$$= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \right) \right]$$

← $\times 4a$

← $\times 4a$

réduisons au même dénominateur

$$= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \right]$$

La quantité $b^2 - 4ac$ est appelée **discriminant** du trinôme, et on la note Δ

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$f(x)$ ne se factorise à l'aide de l'identité remarquable $A^2 - B^2$ que si et

seulement si la quantité $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ peut être assimilée à B^2 .

Pour cela, il faut et il suffit que $b^2 - 4ac \geq 0$. (un carré est toujours positif ou nul).

On distingue donc 3 cas:

- $\Delta < 0$: le trinôme ne se factorise pas; il n'y a aucune racine réelle.
- $\Delta > 0$: on effectue la transformation d'écriture suivante afin de

mettre en évidence l'identité remarquable $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \\
 &= a \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \\
 &= a \left[x - \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \right] \left[x - \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \right]
 \end{aligned}$$

x_1
 x_2

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$: $b^2 - 4ac = 0$; la forme factorisée précédente nous donne : $x_1 = -\frac{b}{2a}$ $x_2 = -\frac{b}{2a}$

Les 2 racines sont confondues : $x_0 = -\frac{b}{2a}$ est appelé racine double

le trinôme se factorise en $f(x) = a(x - x_0)^2$ c'est une identité remarquable.

II Equations et inéquations du second degré

1. Equation $ax^2 + bx + c = 0$

- 1^{er} cas: si $\Delta > 0$

$f(x)$ peut s'écrire sous la forme:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

D'après la règle du produit nul, un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

$$a \neq 0 \quad \text{on a donc} \quad (x - x_1) = 0 \quad \text{ou} \quad (x - x_2) = 0$$

$$x = x_1 \quad \quad \quad x = x_2$$

Cond: $f(x) = 0 : \mathcal{S} = \{x_1; x_2\}$ 2 solutions distinctes

• 2^e cas: si $\Delta = 0$

$$f(x) = a(x - x_0)^2$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow a(x - x_0)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = x_0 : \text{une solution double}$$

• 3^e cas: si $\Delta < 0$

$f(x)$ ne se factorise pas, il n'y a pas de solution à l'équation $f(x) = 0$.

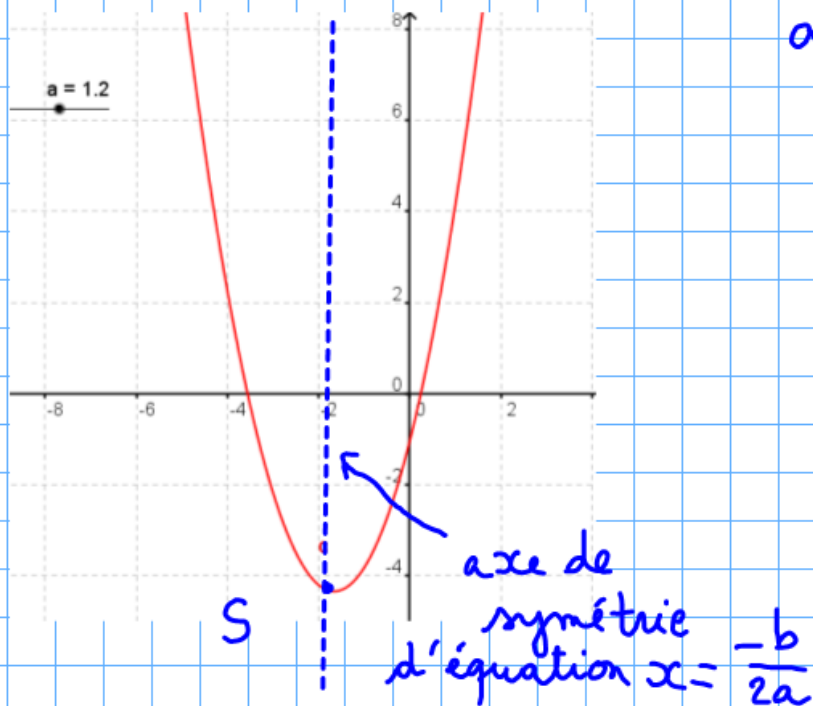
2. ligne d'un trinôme :

a. influence des paramètres a, b, c sur la forme d'une parabole.

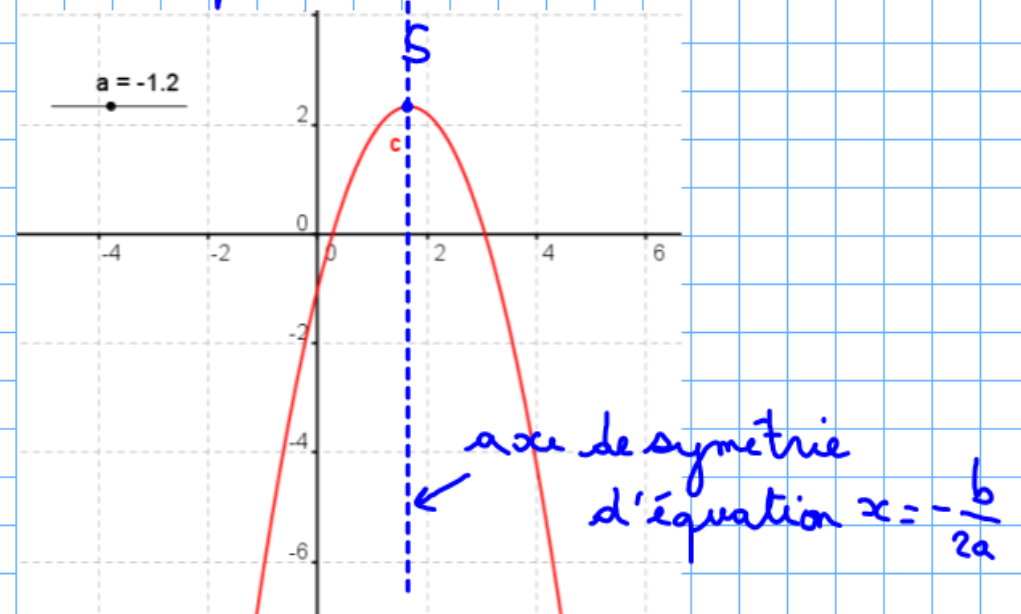
- a détermine la forme et l'orientation de la parabole.

(parabole plus ou moins évasée, tournée vers le haut ou tournée vers le bas).

$a > 0$: la parabole est tournée vers le haut



$a < 0$: la parabole est tournée vers le bas



- b détermine la position latérale de la parabole dans le plan
- c détermine la position en hauteur de la parabole

b. tableau de signe d'un trinôme :

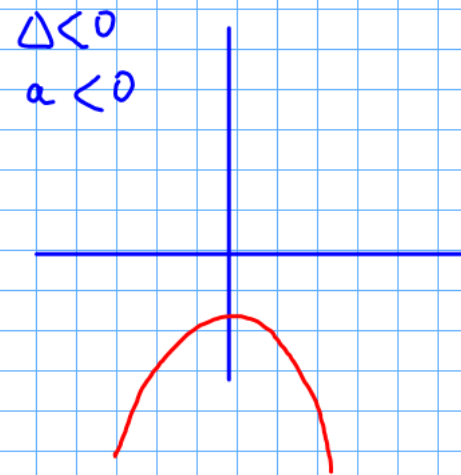
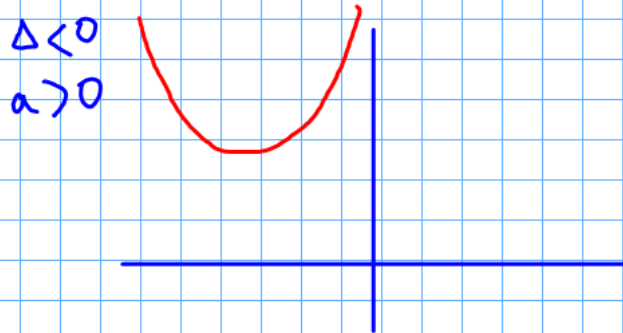
- si $\Delta < 0$: $\sqrt{\Delta}$ n'a pas de sens. Nous allons montrer que le trinôme ne s'annule pas et qu'il reste de signe constant.

$$\text{on a } f(x) = ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

or si $\Delta < 0$ on a $-\Delta > 0$ et en divisant par $4a^2$ qui est une quantité positive on en déduit que $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$

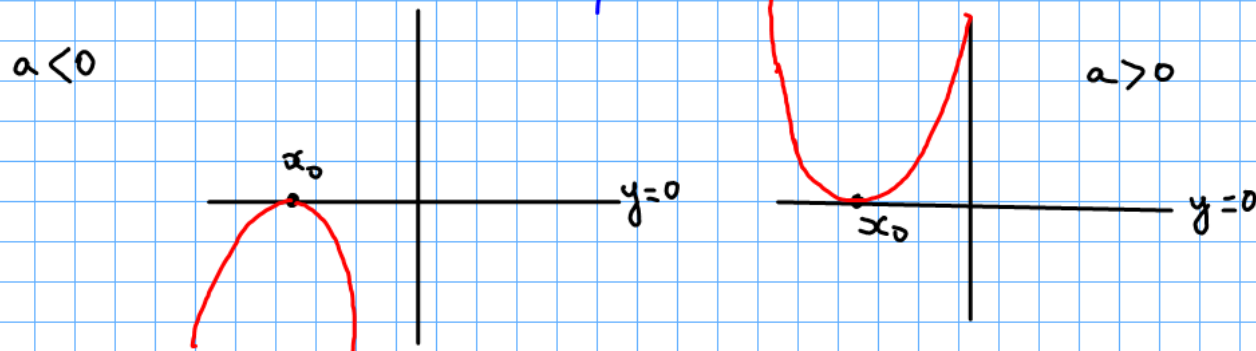
Par somme avec $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$ qui est aussi une quantité positive le crochet est donc une quantité strictement positive.
Au bilan, en multipliant par a , $f(x)$ est donc **du signe de a** .

interprétation graphique : il n'y a pas de racines, graphiquement cela signifie que la courbe C_f ne rencontre pas la droite d'équation $y=0$ (l'axe des abscisses)

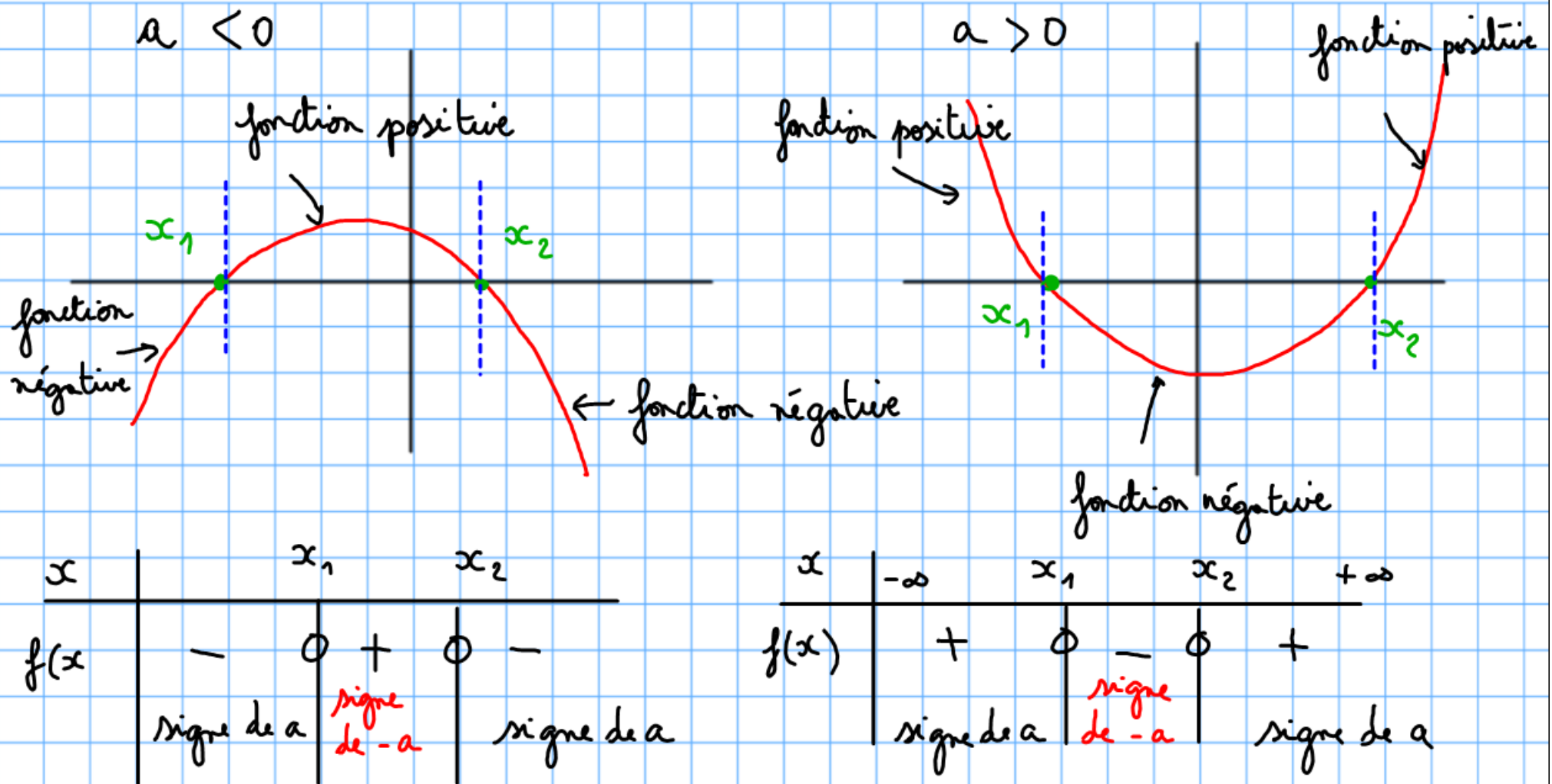


• Cas où $\Delta = 0$ $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$

un carré est toujours positif ou nul, donc $f(x)$ est du signe de a et s'annule en x_0 qui est la racine double.



Cas où $\Delta > 0$ on appuie notre étude sur une observation graphique



Propriété: le trinôme est du signe de a , à l'extérieur des racines