Chapitre 2 : Polynômes du second degré

I Les différentes formes d'une fonction polynôme du second degré

1. Définition :

Dire qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction polynôme de degré 2 (ou trinôme) signifie qu'il existe des nombres réels a, b, c (avec $a \neq 0$) tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = ax^2 + bx + c$

Il s'agit de la forme développée de $f(x)$.

2. Forme canonique

a) La forme canonique de $f(x)$ est du type $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

on montre que $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$

Preuve : • $f(\alpha) = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = a\left(\dfrac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\dfrac{-b}{2a}\right) + c$

$= a \times \dfrac{b^2}{4a^2} - \dfrac{b^2 \times 2}{2a \times 2} + c$

$$f(\alpha) = \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + c = \frac{-b^2}{4a} + c$$

par ailleurs, avec la forme canonique on obtient :

$$f(\alpha) = a\,(\alpha - \alpha)^2 + \beta = a \times 0^2 + \beta = \beta.$$

On a donc $\beta = \dfrac{-b^2}{4a} + c = f(\alpha)$

- $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$= a\left(x^2 + \frac{bx}{a}\right) + c$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$= a\left[x - \left(\frac{-b}{2a}\right)\right]^2 + \left(\frac{-b^2}{4a} + c\right)$$

$$f(x) = a\,(x - \alpha)^2 + \beta$$

b) Dans un repère, la courbe représentative de la fonction f est appelée parabole

Le point $S(\alpha\,;\beta)$ est appelé sommet de la parabole et la droite verticale d'équation $x = \alpha$ est l'axe de symétrie de la parabole.

__Exemple :__ $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 1$ f est une fonction polynôme du second degré.

$a = 0{,}5 \quad b = -2 \quad c = 1$

la forme canonique est $a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ $\beta = f(\alpha)$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{+2}{2 \times 0{,}5} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\beta = f(\alpha) = f(2) = 0{,}5 \times 2^2 - 2 \times 2 + 1$$

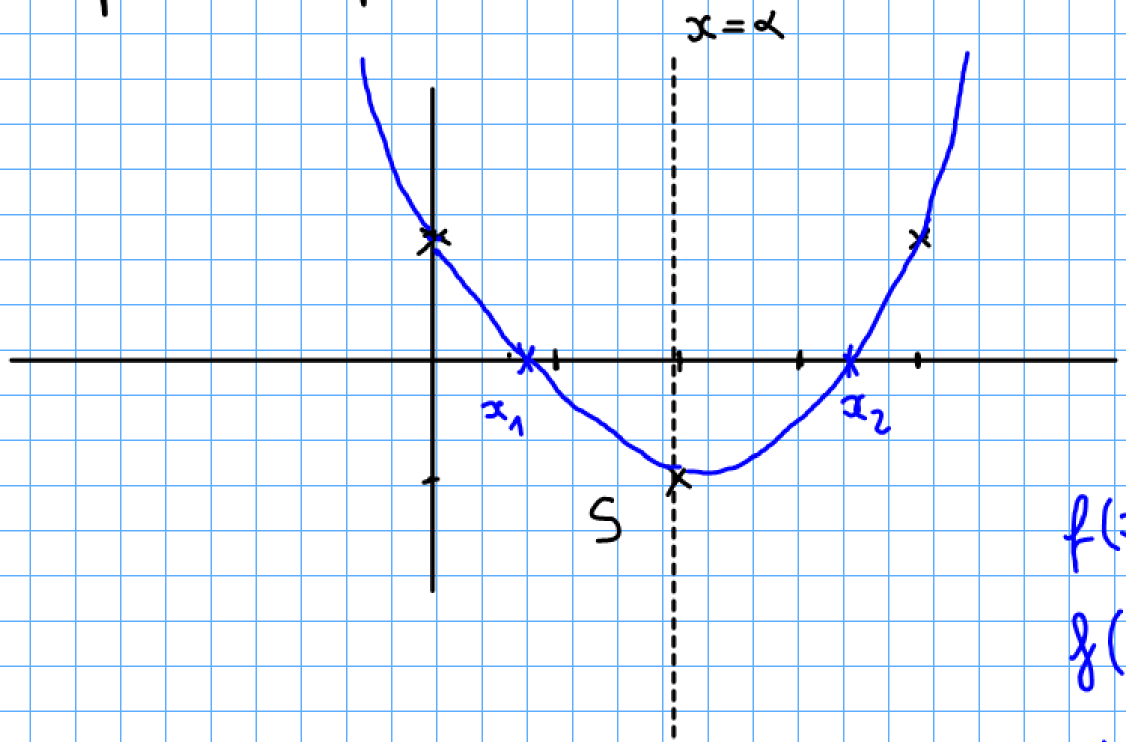
$$= 0{,}5 \times 4 - 4 + 1$$

$$= 2 - 4 + 1 = -1$$

$$f(x) = 0{,}5(x-2)^2 - 1$$

La parabole représentative de f dans un repère a pour sommet $S(2\,;-1)$

α β



$f(0) = 1 = c$

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(0) = a \times 0^2 + b \times 0 + c = c$

ici $c = 1$.

3) Forme factorisée

la forme factorisée de $f(x) = ax^2 + bx + c$ est $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

x_1 et x_2 sont les racines du trinôme ou encore solutions de l'équation

$f(x) = 0$. En effet $f(x_1) = 0$; $f(x_2) = 0$

Détermination des racines x_1 et x_2 :

D'après la forme canonique $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta \quad \text{avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha) = -\frac{b^2}{4a} + c$$

ainsi $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \underbrace{\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)}_{\text{réduisons au même dénominateur}}\right]$$

$\times 4a$

$\times 4a$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right]$$

La quantité $b^2 - 4ac$ est appelée **discriminant** du trinôme, et on la note Δ

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

$f(x)$ ne se factorise à l'aide de l'identité remarquable $A^2 - B^2$ que si et seulement si la quantité $\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ peut être assimilée à B^2.

Pour cela, il faut et il suffit que $b^2 - 4ac \geqslant 0$. (un carré est toujours positif ou nul).

Δ

On distingue donc 3 cas :

- $\Delta < 0$: le trinôme ne se factorise pas ; il n'y a aucune racine réelle.
- $\Delta > 0$: on effectue la transformation d'écriture suivante afin de mettre en évidence l'identité remarquable $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

$$f(x) = a\Big[\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{A^2} - \underbrace{\frac{\Delta}{4a^2}}_{B^2}\Big]$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$= a\Big[x - \underbrace{\left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)}_{x_1}\Big]\Big[x - \underbrace{\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)}_{x_2}\Big]$$

$$\boxed{x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

- si $\Delta = 0$: $b^2 - 4ac = 0$, la forme factorisée précédente nous donne : $x_1 = -\frac{b}{2a}$ $x_2 = -\frac{b}{2a}$

  Les 2 racines sont confondues : $x_0 = \frac{-b}{2a}$ est appelé racine double

le trinôme se factorise en $f(x) = a(x - x_0)^2$ c'est une identité remarquable.

II Equations et inéquations du second degré

1. Equation $ax^2 + bx + c = 0$

- 1er cas : si $\Delta > 0$ $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$f(x) = 0 \iff a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

D'après la règle du produit nul, un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

$a \neq 0$ on a donc $(x - x_1) = 0$ ou $(x - x_2) = 0$

$x = x_1$ $x = x_2$

Concl : $\boxed{f(x) = 0 \ : \ S = \{x_1 \, ; \, x_2\}}$ 2 solutions distinctes

• 2ᵉ cas : si $\Delta = 0$ $f(x) = a(x - x_0)^2$

$f(x) = 0 \iff a(x - x_0)^2 = 0$

$\iff (x - x_0) = 0$

$\iff x = x_0$: une solution double

• 3ᵉ cas : si $\Delta < 0$ $f(x)$ ne se factorise pas, il n'y a pas de solution à l'équation $f(x) = 0$.

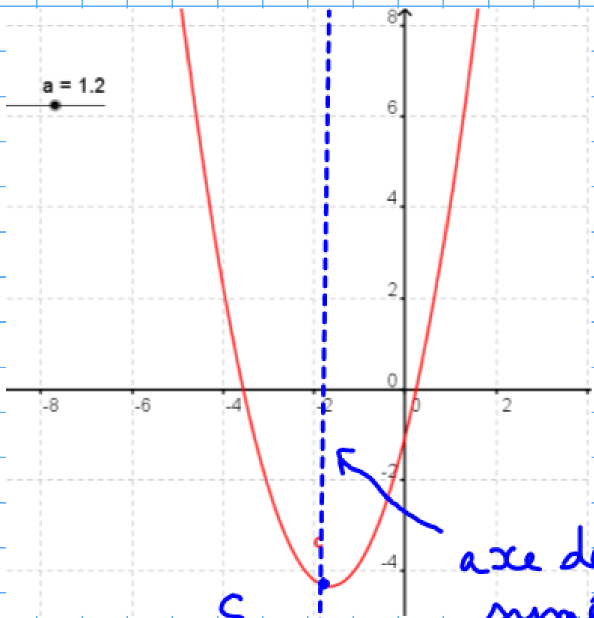
2- Signe d'un trinôme :

a. influence des paramètres a, b, c sur la forme d'une parabole.

- a détermine la forme et l'orientation de la parabole.

(parabole plus ou moins évasée, tournée vers le haut ou tournée vers le bas).

$a > 0$: la parabole est tournée vers le haut

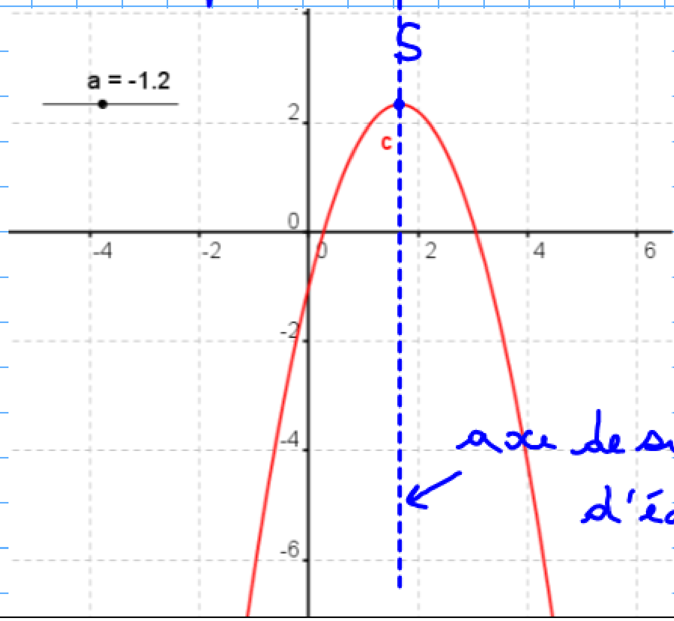


S

axe de symétrie d'équation $x = \frac{-b}{2a}$

$a < 0$: la parabole est tournée vers le bas

S



axe de symétrie d'équation $x = -\frac{b}{2a}$

. b détermine la position latérale de la parabole dans le plan

• c détermine la position en hauteur de la parabole

b- <u>tableau de signe d'un trinôme :</u>

• si $\Delta < 0$: $\sqrt{\Delta}$ n'a pas de sens. Nous allons montrer que le trinôme ne s'annule pas et qu'il reste de signe constant.

on a $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

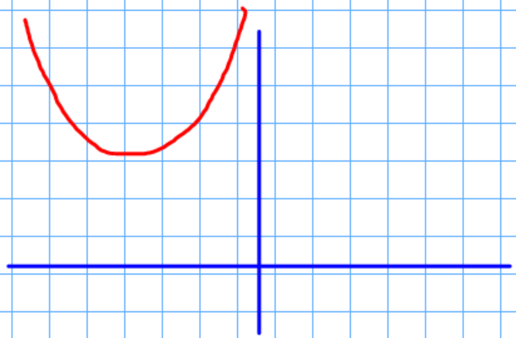
or si $\Delta < 0$ on a $-\Delta > 0$ et en divisant par $4a^2$ qui est une quantité positive on en déduit que $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$

Par somme avec $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ qui est aussi une quantité positive le crochet est donc une quantité strictement positive.

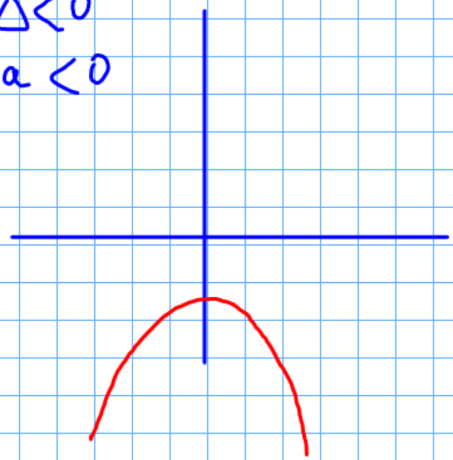
Au bilan, en multipliant par a, $f(x)$ est donc du signe de a.

interprétation graphique : il n'y a pas de racines, graphiquement cela signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ ne rencontre pas la droite d'équation $y=0$ (l'axe des abscisses)

$\Delta < 0$
$a > 0$



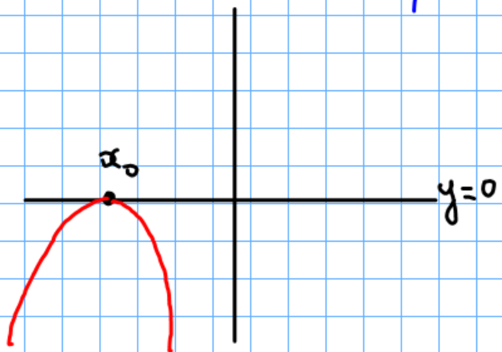
$\Delta < 0$
$a < 0$

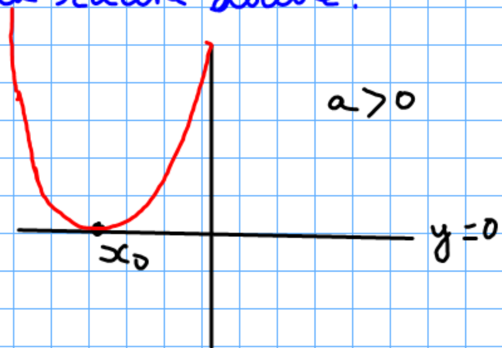


• **Cas où $\Delta = 0$** $\quad f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$

un carré est toujours positif ou nul, donc $f(x)$ est du signe de a et s'annule en x_0 qui est la racine double.

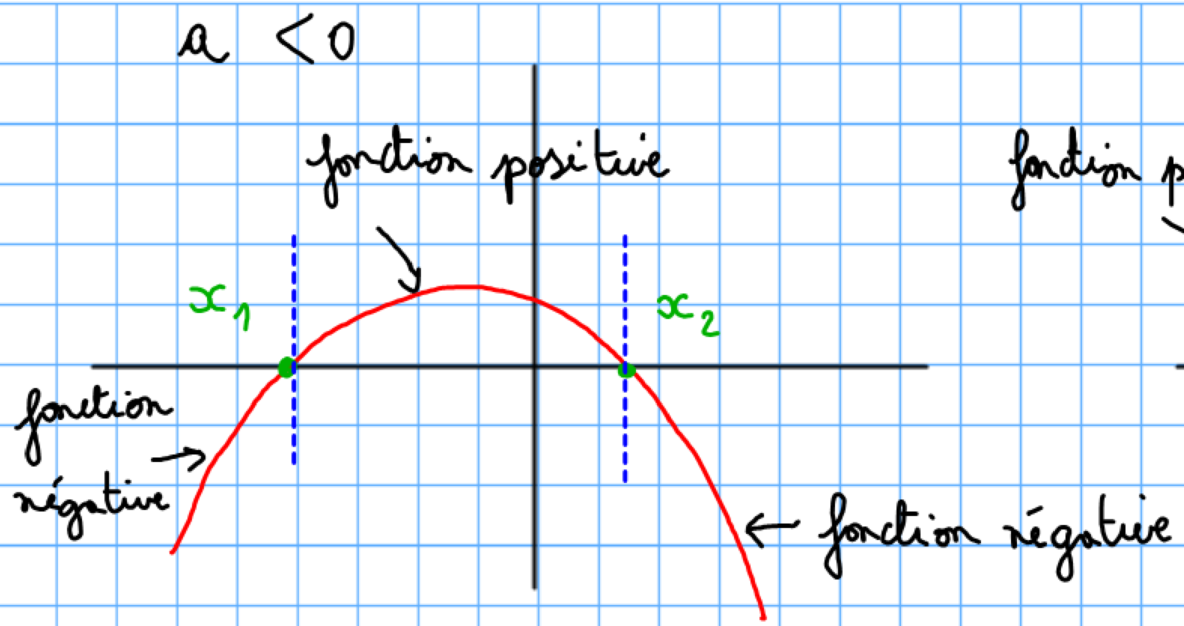
$a < 0$

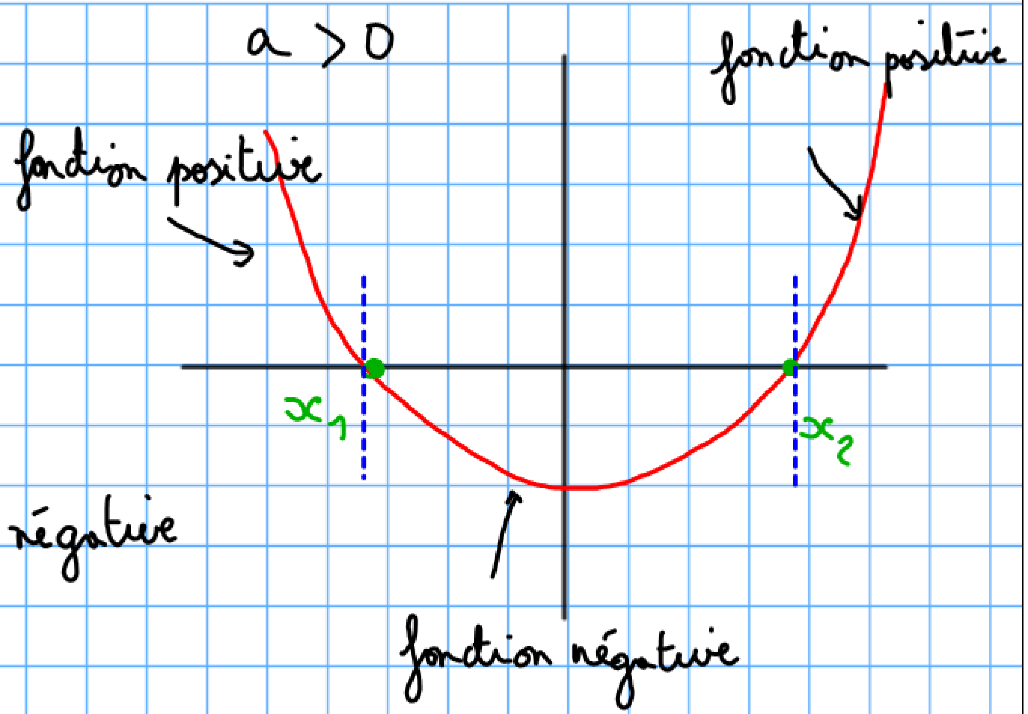




$a > 0$

• Cas où $\Delta > 0$ on appuie notre étude sur une observation graphique





x		x_1		x_2	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
	signe de a		signe de -a		signe de a

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
		signe de a		signe de -a		signe de a	

Propriété : le trinôme est du signe de a, à l'extérieur des racines

3. Application : résolution d'une inéquation du second degré

exemple : Résoudre $x^2 - 4 \leqslant 3x$

l'inéquation équivaut à : $x^2 - 4 - 3x \leqslant 0$

on identifie un trinôme : $x^2 - 3x - 4 \leqslant 0$

on calcule les racines x_1 et x_2 à l'aide du discriminant Δ.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 9 + 16 = 25$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5 \qquad x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{+3 - 5}{2 \times 1} = -1 \qquad = \frac{+3 + 5}{2 \times 1} = 4$$

On souhaite savoir quand le trinôme est négatif ou nul,

comme $a = 1$, on veut que le trinôme soit du signe de $-a$

car a étant positif, $-a$ sera négatif.

d'après la propriété de cours, le trinôme est du signe de "a" à l'extérieur des racines, il est donc du signe de $(-a)$ à l'intérieur des racines.

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

<u>Conclusion</u> : $x^2 - 4 \leqslant 3x$: $\mathcal{S} = [-1 ; 4]$

<u>Autre rédaction</u> : $x^2 - 4 \leqslant 3x \iff x \in [-1 ; 4]$