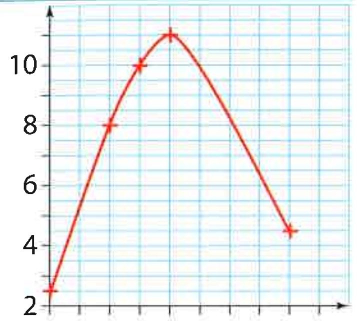
1 Lire des informations sur une courbe

Formulaire p. 285, thème 11

La courbe ci-contre représente la hauteur d'eau (en mètres) dans le port de Saint-Malo en fonction de l'heure pendant une partie d'une journée.

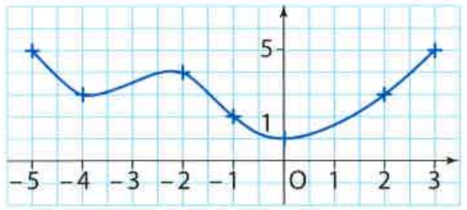


a) Sur quel axe peut-on lire les heures ? les hauteurs d'eau ?
b) À quelle heure s'est produit la marée haute (ou pleine mer) ?
c) Quelle est la hauteur d'eau à 18 h ?

2 Connaître le vocabulaire des fonctions

Formulaire p. 285, thème 11

La courbe ci-contre définit une fonction f.
Recopier et compléter chaque affirmation.



a) Le nombre 3 a pour image … par f.
b) Le nombre 5 a pour antécédents … et … par f.
c) $f(0) = …$ et $f(-2) = …$

3 Lire des informations sur un tableau

Formulaire p. 285, thème 11

Ce tableau définit une fonction g.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$g(t)$	41	27	15	5	−3	−9	−13	−15	−15

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse.
a) « Les nombres 2 et 7 ont des images opposées. »
b) « Le nombre 27 a pour image 1. »
c) « L'image du nombre 2,5 est 10. »

4 Connaître les identités remarquables

Formulaire p. 283, thème 6

a et x désignent des nombres. Développer :
a) $(a-5)^2$ **b)** $(2x+3)^2$ **c)** $(3x-4)(3x+4)$

5 Factoriser des expressions algébriques

Formulaire p. 283, thème 6

a, t, x désignent des nombres. Factoriser :
a) $5t^2 + 3t$ **b)** $(2x+1)^2 - 4(2x+1)$ **c)** $a^2 - 9$

6 Mettre en équation

Formulaire p. 284, thème 8

Un producteur de tomates a vendu $\frac{3}{4}$ de sa récolte à une grande surface et 900 kg à des petits commerçants. Il lui reste 350 kg de tomates.

On souhaite connaître la quantité de tomates produites.

Traduire cette situation par une équation en précisant l'inconnue choisie, puis conclure.

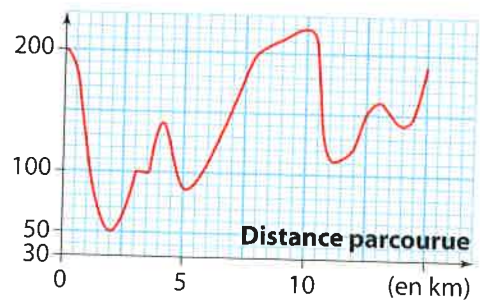
Vérifier les réponses p. 296

Objectif
Réfléchir sur la notion de fonction et sur les modes de représentation dans un contexte concret.

1 Sur un circuit automobile

Un pilote de course procède à des essais sur un circuit fermé. Sur un tour lancé de sa voiture, des enregistreurs de vitesse placés sur le circuit, ainsi qu'un capteur de vitesse embarqué, ont permis d'établir le tableau et le graphique suivants.

Enregistreur n°	Distance parcourue depuis la ligne de départ en km	Vitesse en km/h
1	0	
2	0,5	182
3		50
4	5,1	86
5	8	
6	10	220
7	13	
8	15	190



Note
Tour lancé : la voiture prend son élan pendant un tour et on enregistre les vitesses à partir du deuxième tour.

1 a) Recopier et compléter les valeurs manquantes du tableau.
b) Combien de fois le pilote atteint-il la vitesse de 160 km/h ?

2 • « À toute distance d comprise entre 0 et 15 km correspond une vitesse unique de la voiture de course. »
• « À toute vitesse v comprise entre 50 et 220 km/h correspond une distance unique. »
Que pensez-vous de ces affirmations ? Argumenter la réponse.

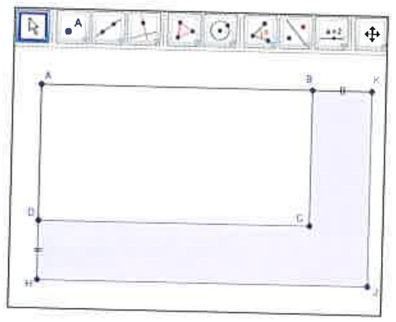
B2i L3-5

3 a) Ouvrir une feuille de calcul d'un tableur et saisir les 2^e et 3^e colonnes du tableau.
b) Avec l'assistant graphique, représenter ce tableau par un nuage de points, puis par une courbe lissée.
c) Comparer ce graphique avec la courbe donnée ci-dessus. Commenter.

Objectif
Utiliser une fonction pour résoudre un problème de façon graphique ou algébrique.

2 En géométrie

ABCD est un rectangle tel que AB = 6 et AD = 4.
H et K sont des points tels que DH = BK avec B sur [AK] et D sur [AH]. On trace le rectangle AKJH.
On se propose de chercher la position du point H pour que l'aire du domaine coloré soit égale à celle du rectangle ABCD.



B2i L1-1 L3-4

1 a) Réaliser cette figure avec un logiciel de géométrie. Afficher l'aire y du domaine coloré.
b) Piloter le point H. Noter a la longueur DH et afficher cette grandeur. Quelles sont les valeurs possibles de a ?
c) Conjecturer la position du point H répondant au problème posé.

2 Afficher un repère et placer les points M $(a ; y)$ et N $(a ; 24)$. Observer les traces de M et de N lorsqu'on pilote le point H ; confirment-elles la conjecture ?

3 a) Montrer que l'aire notée y est aussi donnée par la formule $f(a) = a^2 + 10a$.
Vérifier que pour toute valeur de a : $a^2 + 10a = (a+5)^2 - 25$.
b) Montrer que l'équation $f(a) = 24$ s'écrit $(a+5)^2 - 7^2 = 0$.
c) En déduire la solution exacte du problème posé.

Définir une fonction

1 Ensemble ℝ et intervalles

Note
L'ensemble des nombres **entiers naturels** (positifs) est noté ℕ.
L'ensemble des nombres **entiers relatifs** (positifs ou négatifs) est noté ℤ.

L'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée est appelé l'ensemble des **nombres réels.** On note ℝ l'ensemble de tous ces nombres.
Certaines parties de ℝ sont appelées des **intervalles**; on les note en utilisant des crochets.

Ensemble des réels x tels que :	Représentation	Intervalle
$x < b$	b	$]-\infty ; b[$
$x \geqslant a$	a	$[a ; +\infty[$
$a \leqslant x \leqslant b$	a b	$[a ; b]$
$a < x < b$	a b	$]a ; b[$
$a \leqslant x < b$	a b	$[a ; b[$

Note
$[a ; b[$: en b, le crochet est **ouvert** c'est-à-dire dirigé vers l'extérieur. Cela signifie que b **n'est pas** dans l'intervalle.

On définit de la même façon les intervalles $]a ; b]$, $]a ; +\infty[$ et $]-\infty ; b]$.
Attention ! $-\infty$ et $+\infty$ ne désignent pas des nombres réels ; du côté de $-\infty$ et de $+\infty$, le crochet est toujours ouvert. Par exemple, on note : $\mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$.

2 Vocabulaire des fonctions

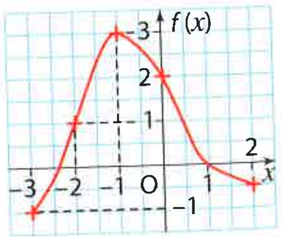
DÉFINITION Définir une fonction f sur une partie D de ℝ, c'est associer à tout nombre x de D, un nombre et un seul appelé **image** du nombre x.

NOTATIONS ET VOCABULAIRE
- L'image du nombre x par la fonction f est notée $f(x)$.
- La fonction f est parfois notée $f : x \mapsto f(x)$.
- On dit que D est **l'ensemble de définition** de f.
- Si $f(a) = b$, on dit que a est **un antécédent** de b par f.

Ici, les parenthèses n'ont pas la même signification que dans un calcul algébrique.

Note
$f(x)$ se lit « f de x ».

EXEMPLE 1 : Une fonction f définie par un graphique
L'ensemble de définition de f est l'intervalle $[-3 ; 2]$.
Le nombre -3 a pour image -1, donc $f(-3) = -1$.
Remarque : Seuls les points repérés par une croix ou des lignes de rappel permettent une lecture exacte des valeurs.



EXEMPLE 2 : Une fonction g définie par un tableau
Le nombre 0 a une seule image 1.
$g(-1) = 4$ et $g(3) = 4$ donc les antécédents de 4 par g sont -1 et 3.

Nombre x	-4	-1	0	2	3
Image $g(x)$	5	4	1	2	4

Note
L'ensemble de définition de g est $D = \{-4 ; -1 ; 0 ; 2 ; 3\}$.

EXEMPLE 3 : Une fonction h définie par une formule
La fonction h associe à un nombre réel x quelconque, le nombre $h(x) = 2x^2 - 3$.
L'ensemble de définition de h est ℝ.
Pour calculer l'image de -5, on remplace x par -5 dans l'expression de $h(x)$:
$$h(-5) = 2 \quad (-5)^2 - 3 = 47.$$

Note
On peut écrire : $h : x \mapsto 2x^2 - 3$

Exercice résolu 1 Exploiter différentes présentations d'une fonction

Voir aussi l'exercice 4, page 46

Animation numérique

Énoncé

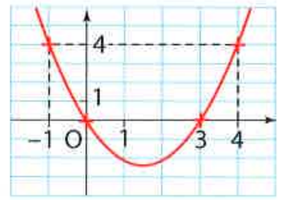
Algorithme
- Choisir un nombre x.
- L'élever au carré.
- Retrancher trois fois le nombre de départ.
- Afficher le résultat obtenu $f(x)$.

Tableau de valeurs

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$		0	-2	-2	0

Formule algébrique
$f(x) = \ldots$

Graphique



a) Avec l'algorithme, vérifier que $f(2) = -2$ et compléter le tableau avec l'image de -1.
b) Donner la formule algébrique de $f(x)$ pour tout nombre réel x.
c) Choisir le mode le plus pertinent pour déterminer :
- $f(1)$
- les antécédents de 4 par f
- $f\left(-\frac{2}{3}\right)$

Solution

a) $2 \xrightarrow{\text{Carré}} 4$, $2 \xrightarrow{3} 6$, $4 - 6 = -2$ donc $f(2) = -2$.

$-1 \xrightarrow{\text{Carré}} 1$, $-1 \xrightarrow{3} -3$, $1 - (-3) = 4$ donc $f(-1) = 4$.

b) $f(x) = x^2 - 3x$.
c) • $f(1) = -2$ d'après le tableau.
• Les antécédents de 4 sont -1 et 4 par lecture du graphique.
• $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 3\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9} + 2 = \frac{22}{9}$.

Commentaires
- Ce résultat est cohérent avec la lecture du tableau.
- Ce résultat est cohérent avec la lecture graphique.
- $x \xrightarrow{\text{Carré}} x^2$, $x \xrightarrow{3} 3x$, $x^2 - 3x$
- Les lignes de rappel (en pointillés) sur le graphique permettent de lire les antécédents de 4.

Exercice résolu 2 Utiliser le vocabulaire des fonctions

Voir aussi les exercices 6 et 7, page 46

Énoncé
g est la fonction qui à tout nombre x strictement positif associe $g(x) = \frac{4}{x} + 2$.
a) Voici un tableau de valeurs de g.
Quelle formule a-t-on saisi dans la cellule B2 ?

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	1	2	3	4	5	6
2	g(x)	6	4	3,333	3	2,8	2,667

b) Quel est l'ensemble de définition de g ?
c) Pour chaque affirmation dire si elle est vraie ou fausse.
(1) -2 a un antécédent. **(2)** 0 n'a pas d'image. **(3)** $g(3) = 3{,}333$.

Solution
a) On tape la formule = 4/B1 + 2 .
b) $D =]0 ; +\infty[$.
c) (1) Fausse.
(2) Vraie.
(3) Fausse.

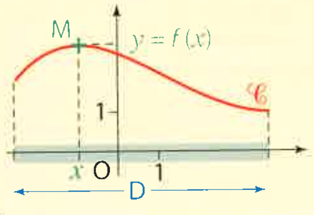
Note
$g(3) \approx 3{,}333$.

Commentaires
- D est formé des réels $x > 0$ (1re phrase de l'énoncé).
- $g(x) = -2$ est réalisé pour $x = -1$, mais $-1 \notin D$.
- $g(3) = \frac{4}{3} + 2 = \frac{10}{3}$ (donc $g(3) \neq 3{,}333$).

Courbes et résolutions graphiques

1 Courbe représentative d'une fonction

DÉFINITIONS f est une fonction définie sur D.
Dans un repère du plan, la **courbe représentative** (ou représentation graphique) $\mathscr{C}$ de f est l'ensemble des points M $(x\,;y)$ dont :
- l'abscisse x décrit l'ensemble de définition D ;
- l'ordonnée y est l'image de x par f.



Autrement dit : **M $(x\,;y) \in \mathscr{C}$ si, et seulement si, $x \in$ D et $y = f(x)$.**

VOCABULAIRE
On dit que **la courbe $\mathscr{C}$ a pour équation $y = f(x)$ dans le repère choisi.**

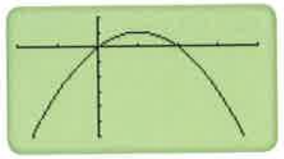
Logique
« Si et seulement si » signifie ici :
- si M $(x\,;y) \in \mathscr{C}$, alors $x \in$ D et $y = f(x)$;
- mais aussi : si $x \in$ D et $y = f(x)$, alors M $(x\,;y) \in$ D.

➤ page 292

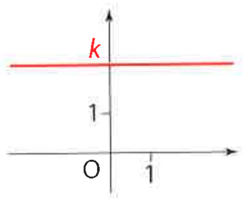
EXEMPLE 1
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x$.
Voici sa courbe $\mathscr{P}$ à l'écran d'une calculatrice.
- Le point A $(2\,;0)$ appartient-il à $\mathscr{P}$?

Oui, car $f(2) = -2^2 + 2 \quad 2 = 0$.
- Le point B $(-2\,;-7)$ appartient-il à $\mathscr{P}$?

Non, car $f(-2) = -(-2)^2 + 2(-2) = -8$ et $-8 \neq -7$.



EXEMPLE 2
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k$ où k est un nombre donné. Cette fonction affine est dite constante. Sa courbe est la droite d'équation $y = k$ représentée ci-contre.

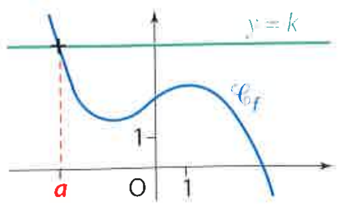


2 Résolution graphique d'équations

$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère.

Équation $f(x) = k$ (avec k réel)

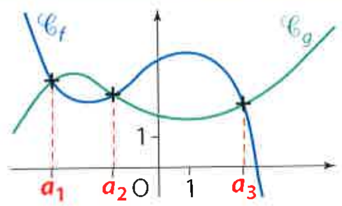
PROPRIÉTÉ Les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont **les abscisses** des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite d'équation $y = k$.



Sur cette figure, l'équation $f(x) = k$ a pour seule solution le nombre a.

Équation $f(x) = g(x)$

PROPRIÉTÉ Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont **les abscisses** des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.



Sur cette figure, l'équation $f(x) = g(x)$ a trois solutions : a_1, a_2, a_3.

Exercice résolu 1 Utiliser une calculatrice graphique

➤ Voir aussi les exercices 12 et 13, page 47

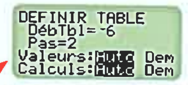
Animation numérique

Énoncé
f est la fonction définie sur l'intervalle $[-6\,;2]$ par $f(x) = x^2 + 4x - 8$.
a) Éditer le tableau de valeurs de f avec un pas de 2 (c'est-à-dire de 2 en 2).
b) Tracer la courbe de f à l'écran de la calculatrice.

Solution TI

a) • Taper sur Y= et en Y1 saisir :
X,T,Θ,n x^2 + 4 X,T,Θ,n − 8 ENTER

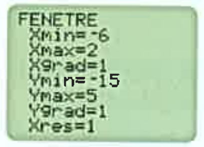
• Taper sur TBLSET et renseigner ainsi.

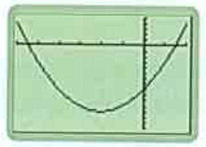


• Taper sur TABLE ; on obtient cet écran.

b) • Taper sur WINDOW et renseigner comme indiqué (écran de gauche).

• Taper sur GRAPH pour obtenir la courbe.

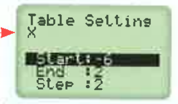




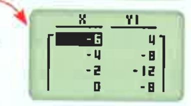
Solution Casio

a) • Taper sur MENU et entrer dans TABLE. En Y1, saisir :
X,θ,T x^2 + 4 X,θ,T − 8 EXE

• Taper sur SET et renseigner ainsi.



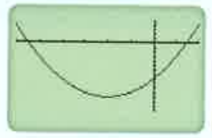
• Taper sur TABL ; on obtient cet écran.



b) • Taper sur MENU, entrer dans GRAPH, saisir l'expression de $f(x)$ dans Y1.

• Taper sur V-WINDOW et renseigner comme indiqué (écran de gauche).

• Taper sur DRAW pour obtenir la courbe.



Exercice résolu 2 Résoudre graphiquement une équation

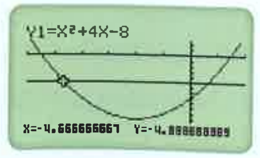
➤ Voir aussi les exercices 14 à 16, page 47

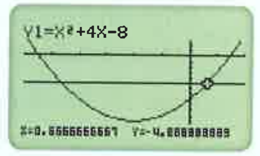
Animation numérique

Énoncé
f est la fonction définie à l'exercice 1. Résoudre graphiquement :
a) l'équation $f(x) = 0$ **b)** l'équation $f(x) = -5$

Solution
a) Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de la courbe avec la droite d'équation $y = 0$, autrement dit, avec l'axe des abscisses.
Sur le graphique de l'exercice 1, on lit que l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions x_1 et x_2 avec $x_1 \approx -5{,}5$ et $x_2 \approx 1{,}5$.
b) Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de la courbe avec la droite d'équation $y = -5$. Avec la calculatrice, on trace cette droite.
L'équation $f(x) = -5$ a deux solutions : $x_1' \approx -4{,}6$ et $x_2' \approx 0{,}6$.

Note
On utilise le mode TRACE de la calculatrice. On déplace le curseur approximativement jusqu'aux points d'intersection et on lit au bas de l'écran leurs abscisses.





Expressions algébriques, équations

a, *b*, *c*, *d* et *k* désignent des nombres réels.

1 Développer - Factoriser

DÉFINITION **Développer** un produit, c'est le transformer en somme.
Factoriser une somme, c'est la transformer en produit.

• Distributivité

Développer

$k(a+b) = ka + kb$

Factoriser

• Double distributivité

$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

• Identités remarquables

Développer

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Factoriser

EXEMPLE 1
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+5)(x-3)$.
Développement : $f(x) = 2x^2 - 6x + 5x - 15$.
Réduction : $f(x) = 2x^2 - x - 15$.

EXEMPLE 2
g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^2 - 5x$.
Factorisation : $g(x) = x \times 2x - x \times 5 = x(2x-5)$.

On met x en facteur.

EXEMPLE 3
h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 4x^2 - 9$.
Factorisation : $h(x) = (2x)^2 - 3^2 = (2x+3)(2x-3)$.

2 Résoudre une équation

Équation du premier degré

EXEMPLE : Résolution de l'équation $5x + 7 = 3 - 2x$

$$5x + 7 = 3 - 2x$$
$$5x + \cancel{7} - \cancel{7} + 2x = 3 - \cancel{2x} - 7 + \cancel{2x}$$
$$7x = -4$$
$$x = -\frac{4}{7}$$

On se ramène à une équation du type $ax = b$.

La solution de l'équation $5x + 7 = 3 - 2x$ est $-\frac{4}{7}$.

Équation « produit nul »

PROPRIÉTÉ **Règle du produit nul**
Un produit est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.
Autrement dit : $\mathbf{A \times B = 0}$ **équivaut à** $\mathbf{A = 0}$ **ou** $\mathbf{B = 0}$.

EXEMPLE : Résolution de l'équation $(x+5)(2-x) = 0$
$(x+5)(2-x) = 0$ équivaut à $x + 5 = 0$ ou $2 - x = 0$ c'est-à-dire $x = -5$ ou $x = 2$.
Les solutions de cette équation sont les nombres -5 et 2.

Logique
« Si et seulement si », « équivaut à » expriment des conditions nécessaires et suffisantes.
page 292

Exercice résolu 1 Choisir la bonne expression

Voir aussi l'exercice 28, page 48

Énoncé

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2-x)(1-3x) + 4x(1-3x)$.
Déterminer les valeurs exactes des antécédents de 0 par f.

Solution

Déterminer les antécédents de 0 par f revient à résoudre l'équation $f(x) = 0$.
C'est-à-dire successivement :

$(2-x)(1-3x) + 4x(1-3x) = 0$

$(1-3x)(2-x+4x) = 0$

$(1-3x)(2+3x) = 0$

$1 - 3x = 0$ ou $2 + 3x = 0$

$x = \frac{1}{3}$ ou $x = -\frac{2}{3}$.

Les antécédents de 0 par f sont donc les réels $\frac{1}{3}$ et $-\frac{2}{3}$.

MÉTHODE

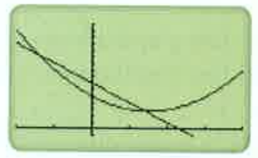
Pour répondre à cette question, on peut penser à :
- utiliser le mode TRACE de la calculatrice, mais il n'aurait fourni que des **valeurs approchées** des antécédents ;
- développer l'expression de $f(x)$, mais on n'aurait pas su résoudre l'équation $-9x^2 - 3x + 2 = 0$;
- factoriser l'expression de $f(x)$. C'est ici la bonne démarche.

Exercice résolu 2 Conjecturer, puis résoudre

Voir aussi l'exercice 29, page 48

Énoncé

Voici les courbes représentatives des fonctions $f : x \mapsto x^2 - 3x + 5$ et $g : x \mapsto 7 - 3x$ obtenues à l'écran d'une calculatrice.



a) Conjecturer les abscisses des points d'intersection des deux courbes.
b) Démontrer cette conjecture.

Solution

a) Pour lire les coordonnées des points d'intersection à l'écran de la calculatrice, on peut utiliser :
- G-Solv, puis ISCT sur Casio ;
- CALC, puis intersect sur TI.

On conjecture qu'il y a deux points d'intersection et que leurs abscisses sont $x_1 \approx -1{,}4$ et $x_2 \approx 1{,}4$.

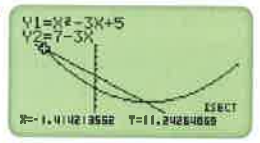
b) Les abscisses des points d'intersection de ces courbes sont les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ c'est-à-dire :

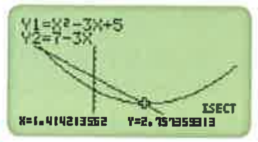
$$x^2 - \cancel{3x} + 5 = 7 - \cancel{3x}$$
$$x^2 = 2.$$

Les abscisses cherchées sont donc :
$$x_1 = -\sqrt{2} \text{ et } x_2 = \sqrt{2}.$$

Note
Sur TI, il faut de plus indiquer la courbe 1 et la courbe 2, puis une valeur inférieure à l'abscisse cherchée.

Commentaires





- À l'écran on voit deux points d'intersection, mais on ne sait pas s'il n'y en a pas d'autres à l'extérieur de la fenêtre choisie.

Compléments numériques

Exercices de base

Pour créer des automatismes

Définir une fonction

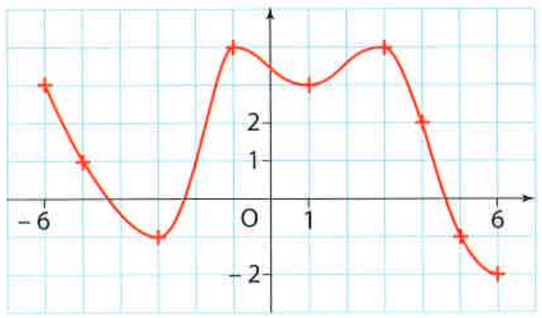
1 Traduire chaque information par l'appartenance de x à un intervalle.
Représenter cet intervalle sur une droite graduée.

a) $3 \leqslant x \leqslant 7$ **b)** $-3 \leqslant x < 5$ **c)** $x < 5$
d) $x \geqslant 0$ **e)** $-2 < x \leqslant 1$ **f)** $x \leqslant -2$

2 Traduire chaque information par des inégalités.

a) $x \in [-2;1]$ **b)** $x \in]0;4[$ **c)** $x \in [1;100[$
d) $x \in]-\infty;10[$ **e)** $x \in [5;+\infty[$ **f)** $x \in]-\infty;0]$

3 La courbe ci-dessous représente une fonction f.



a) Lire graphiquement l'ensemble de définition de f.
b) Lire graphiquement les images par f de :
• −5 • 3 • 6
c) Lire graphiquement les antécédents par f de :
• 4 • −1 • 3

4 On considère l'algorithme de calcul suivant.

• Choisir un nombre entier naturel n.
• Lui ajouter 4.
• Multiplier la somme obtenue par le nombre choisi.
• Ajouter 4 à ce produit.
• Écrire le résultat $f(n)$.

a) Vérifier que l'on définit ainsi une fonction f sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels.
b) Réaliser un tableau de valeurs de $f(n)$ pour n entier entre 0 et 10.
c) En observant les nombres $f(n)$ obtenus dans le tableau, émettre une conjecture.
d) Écrire la formule définissant $f(n)$ pour tout entier naturel n, puis démontrer la conjecture émise au **c)**.

Conseil : *se reporter à l'exercice résolu 1, page 41.*

5 x et y désignent des réels strictement positifs.
Un rectangle de dimensions x et y (en centimètres) a pour aire 25 cm².
a) Exprimer y en fonction de x.
b) On définit une fonction en associant à la dimension x, l'autre dimension y.
Quel est l'ensemble de définition de cette fonction ?

6 La fonction f est définie par le tableau de valeurs suivant.

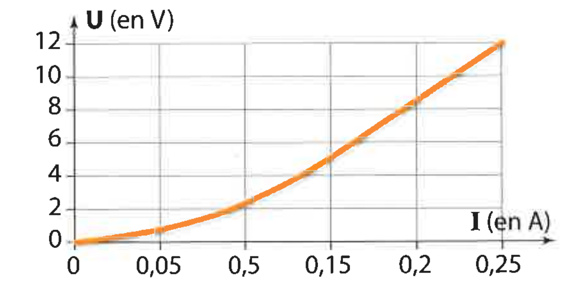
x	−5	−2	−1	0	4
$f(x)$	2	5	0	−3	2

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse.
a) 2 n'a pas d'image par f.
b) 5 et −5 ont des images opposées.
c) 0 a une image par f qui est −1.

Conseil : *se reporter à l'exercice résolu 2, page 41.*

7 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(t) = -3\,(t-1)^2.$$
a) Calculer l'image de 2.
b) Calculer $f(-3)$.
c) Est-il vrai que 4 n'admet pas d'antécédent par f ?
d) Est-il vrai que 0 admet un seul antécédent par f ?
e) Déterminer un antécédent de −12.

8 Dans un manuel de Physique-Chimie, on trouve ce graphique qui montre le tracé de la caractéristique d'une lampe.



a) Quelle grandeur électrique figure sur chaque axe ?
Recopier et compléter :
« La caractéristique est la représentation de la fonction qui à chaque …, exprimée en … associe une seule … exprimée en … »
b) Quelle est approximativement l'image de 0,2 ? Interpréter cette information dans le contexte électrique.

9 f est la fonction définie sur $]-2;+\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{1}{x+2}.$$
a) Expliquer pourquoi f n'est pas définie en −2.
b) Calculer $f(4)$.
c) Déterminer un antécédent de $\frac{1}{2}$.

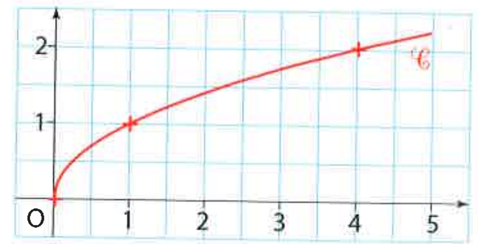
Courbes et résolutions graphiques

10 On réchauffe doucement un glaçon et on mesure l'évolution de sa température en fonction du temps.
À l'instant t en secondes, on associe la température $f(t)$ de la matière observée (glace ou eau) en degrés Celsius.
On a relevé les températures suivantes.

t	0	9	22	35	45	58
$f(t)$	−5,5	−4	−2	−1	−0,5	0
t	100	120	160	180	200	220
$f(t)$	0	0	0	0,1	0,5	1

a) Tracer une courbe pouvant représenter f (*unités :* 1 cm pour 20 secondes et 1 cm pour 1 degré Celsius).
b) Pendant combien de secondes la température reste-t-elle comprise entre −0,5 et +0,5 degré ?

11 La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente une fonction f définie sur l'intervalle $[0;5]$.



a) Parmi les points suivants, quels sont ceux dont on peut affirmer qu'ils appartiennent à la courbe $\mathscr{C}$?
O (0 ; 0) ; A (1 ; 1) ; B (2 ; 1,4) ;
C (3 ; 1,7) ; D (4 ; 2) ; E (2,25 ; 1,5).
b) Sachant que f est définie par $f(x) = \sqrt{x}$, dire, par le calcul, si chacun des points précédents appartient ou non à la courbe $\mathscr{C}$.

12 f est la fonction définie sur $[-10;10]$ par :
$$f(x) = (x-4)(x+5).$$
a) Éditer le tableau de valeurs de f avec le pas 0,5.
b) Tracer la courbe de f à l'écran de la calculatrice.

Conseil : *se reporter à l'exercice résolu 1, page 43.*

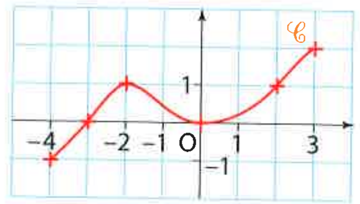
13 f est la fonction définie sur $[-4;6]$ par :
$$f(x) = x^2 + 2x - 4.$$
a) Faire afficher par la calculatrice une table des valeurs de $f(x)$ pour x allant de −4 à 6 avec un pas de 1.
b) Donner deux antécédents de −1 par f.

14 **1.** Tracer à l'écran de la calculatrice la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2 + 2x - 3$.
2. a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$.
b) Vérifier par le calcul les solutions lues sur le graphique.

Conseil : *se reporter à l'exercice résolu 2, page 43.*

15 f est la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :
$$f(x) = \sqrt{x}.$$
g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = 2x - 1.$$
1. Tracer à l'écran de la calculatrice les courbes représentatives des fonctions f et g.
2. a) Combien de solutions l'équation $\sqrt{x} = 2x - 1$ semble-t-elle avoir ? Conjecturer sa (ou ses) valeur(s).
b) Vérifier cette conjecture par le calcul.

16 Dans un repère, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-4;3]$.



Résoudre graphiquement les équations :
a) $f(x) = 2$; **b)** $f(x) = 1$; **c)** $f(x) = 0$;
d) $f(x) = -1$; **e)** $f(x) = -2$.

17 Travailler en groupe — À l'aide d'un sonar, un navire sonde le fond marin. Pour cela, il se déplace en suivant une droite d à partir d'un point origine et il émet des salves d'ultrasons. Il mesure le temps qui s'écoule avant de recevoir l'écho des ultrasons et en déduit la profondeur $h(x)$ de la mer sous le point situé à la distance x de l'origine.
Le tableau ci-dessous donne les mesures, en mètres, effectuées pour plusieurs positions du navire.

x	0	50	100	200	250	350
$h(x)$	−45	−45	−30	−30	−37,5	−37,5

a) Tracer le nuage de points associé à ce tableau (*unités :* 2 cm pour 100 m en abscisses et 4 cm pour 50 m en ordonnées). Que représente ici l'axe des abscisses ?
b) Réaliser à main levée un tracé du profil du fond marin le long de la droite d.

c) Estimer la profondeur pour $x = 150$ m et les positions pour lesquelles il y a 37,5 m de fond.
d) La machine embarquée sur le navire relie deux points consécutifs du nuage par un segment de droite. Construire ce tracé d'une autre couleur et répondre à nouveau à la question **c)**.

Expressions algébriques, équations

Pour les exercices 18 à 20, développer, puis réduire chaque expression.

18 **a)** $(7x+1)^2$ **b)** $(x-3)^2$ **c)** $\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{4}a\right)^2$

19 **a)** $(-3-2x)^2$ **b)** $(5x-4)^2$ **c)** $\left(\frac{1}{2}x-4\right)^2$

20 **a)** $(3x+1)(3x-1)$ **b)** $4\left(\frac{1}{2}y-1\right)\left(\frac{1}{2}y+1\right)$

21 Développer, puis réduire, l'expression de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}x-1\right)^2 - (2x-1)(2x+1).$$

22 Factoriser chaque expression en mettant en évidence un facteur commun.
a) $9a + 15$ **b)** $3x^2 - 15x$
c) $8x - x^2(5x-1)$ **d)** $(3x-2)^2 - (2x-1)(3x-2)$

23 « **Le coup du 1** »

$$A = (2x+5)^2 + (2x+5)(x-4) + 2x + 5$$

a) Hervé doit factoriser A. Voici sa copie.

A = (2x+5)(2x+5+x−4)
A = (2x+5)(3x+1)

Tester l'égalité obtenue par Hervé pour $x = 0$.
Que peut-on en conclure ?
b) Pour factoriser A, on peut penser à écrire :

$$A = (2x+5)^2 + (2x+5)(x-4) + (2x+5) \quad 1.$$

Factoriser alors correctement A.

24 « **Le coup du – 1** »
1. $B = (2x-3)(5x+7) - 2x + 3$
Il semble qu'il n'y ait pas de facteur commun évident dans l'expression B. Et pourtant…
a) Recopier et compléter :

$$B = (2x-3)(5x+7) - 1\,(\ldots).$$

b) Factoriser alors B.
2. Factoriser :
$C = (x-3)^2 - x + 3$ et $D = (x-4)(3x+2) - 3x - 2$

Pour les exercices 25 à 27, factoriser chaque expression en utilisant une identité remarquable.

25 **a)** $x^2 + 16x + 64$ **b)** $4x^2 - 20x + 25$

26 **a)** $16x^2 - 1$ **b)** $4x^2 - 25$

27 **a)** $9 - x^2$ **b)** $(x+2)^2 - 49$

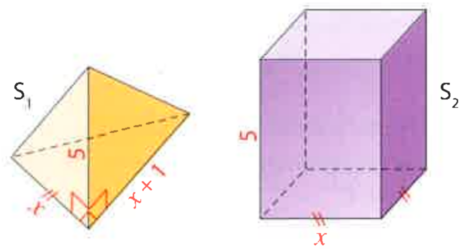
28 On donne plusieurs expressions d'une même fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
Forme 1 : $f(x) = 4(x-5)^2 - 9$.
Forme 2 : $f(x) = (2x-13)(2x-7)$.
Forme 3 : $f(x) = 4x^2 - 40x + 91$.
1. Développer les formes 1 et 2 ; vérifier que l'on obtient la forme 3.
2. Quelle est la forme factorisée de $f(x)$?
3. Dans chaque situation, choisir la forme la plus appropriée pour répondre à la question posée.
a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
b) Calculer $f(0)$.
c) Déterminer les antécédents de -9.
d) Calculer l'image de $\sqrt{2}$.
e) Résoudre l'équation $f(x) = 91$.
Conseil : *se reporter à l'exercice résolu 1, page 45.*

29 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (2x+1)^2 - \left(\frac{5}{2}x-1\right)(2x+1).$$

a) Avec la calculatrice, tracer la courbe représentative de g avec une fenêtre adaptée et conjecturer les solutions des équations $g(x) = 0$ et $g(x) = 2$.
b) Développer et réduire l'expression de $g(x)$.
c) Factoriser l'expression de $g(x)$.
d) Résoudre algébriquement les équations $g(x) = 0$ et $g(x) = 2$.
Conseil : *se reporter à l'exercice résolu 2, page 45.*

30 La base de la pyramide S_1 est un triangle rectangle et la base du parallélépipède rectangle S_2 est un carré.



a) Exprimer en fonction de x les volumes V_1 et V_2 des solides S_1 et S_2.
Aide : *voir le Formulaire, page 281.*
b) Est-ce possible de choisir x pour que S_1 et S_2 aient le même volume ?

Exercices d'entraînement

Pour développer des compétences

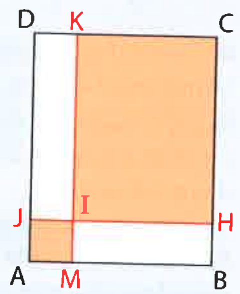
Travaux pratiques

Compléments numériques

31 B2i L 1-1 L 2-4 **Fonctions et géométrie**

OBJECTIF Explorer un problème en géométrie dynamique, puis le résoudre algébriquement.

On considère un rectangle ABCD tel que AB = 8 et AD = 10.
M est un point variable sur le segment [AB]. On considère le point J du segment [AD] et le point I tels que AMIJ soit un carré.
On note H le point d'intersection des droites (IJ) et (BC) et K le point d'intersection des droites (MI) et (CD).



On se propose de chercher les positions du point M pour lesquelles la somme des aires des quadrilatères AMIJ et CKIH est égale à la moitié de l'aire du rectangle ABCD.

1. Conjecture

a) À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, réaliser une figure.
b) Afficher la distance AM et la somme S des aires des quadrilatères AMIJ et CKIH.
Piloter le point M sur le segment [AB] et émettre une conjecture sur les positions du point M qui semblent répondre au problème.

2. Preuve

On note x la longueur du segment [AM].
a) Exprimer en fonction de x la somme des aires des quadrilatères AMIJ et CKIH que l'on notera S (x).
b) Quel est l'ensemble de définition de la fonction S ? Développer et réduire l'expression de S (x).
c) Traduire le problème par une équation.
d) Développer le produit $(x-4)(x-5)$ et en déduire les solutions du problème posé.

D'après Académie de Versailles

32 **Résoudre un problème de plusieurs façons**

OBJECTIF Pratiquer une activité expérimentale, utiliser des outils logiciels, conduire une démonstration.

On se propose de résoudre le problème suivant :
« Peut-on trouver un réel positif qui, une fois élevé au cube, a la même valeur que son double augmenté de 1 ? »

1. Avec un tableur

a) Réaliser cette feuille de calcul et donner un encadrement d'une solution au problème.

	A	B	C	D
1	x	x³	2x + 1	x³ - (2x + 1)
2	0			
3	1			
4	2			
5	3			
6	4			
7	5			

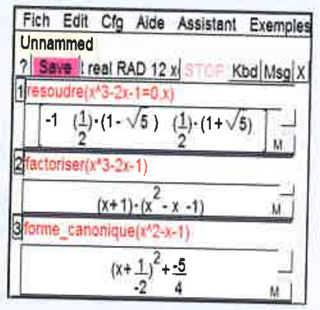
b) Modifier la feuille de calcul de façon à donner une valeur approchée de la solution à 0,1 près.
c) Donner de même une valeur approchée de la solution à 0,01 près, puis à 0,001 près.
En quoi cette méthode est-elle algorithmique ?

2. Avec la calculatrice

a) Utiliser la calculatrice pour conjecturer le nombre de solutions positives de l'équation $x^3 = 2x + 1$ (ajuster éventuellement la fenêtre graphique).
b) Lire une valeur approchée de chaque solution.

3. Avec le calcul formel

Voici une copie d'écran du logiciel Xcas.



a) Utiliser la ligne $\boxed{1}$ pour donner la solution exacte du problème.
b) Écrire les deux égalités fournies par les lignes $\boxed{2}$ et $\boxed{3}$.

4. Par le calcul algébrique

a) Vérifier que résoudre le problème équivaut à résoudre :

$$x^3 - 2x - 1 = 0 \text{ avec } x > 0.$$

b) Justifier que pour tout réel x :

$$x^3 - 2x - 1 = (x+1)(x^2 - x - 1).$$

c) En déduire que résoudre le problème équivaut à résoudre :

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad \text{avec} \quad x > 0.$$

d) Justifier que pour tout réel x :

$$x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}.$$

En déduire la solution exacte du problème.

Info
*La solution de ce problème est **le nombre d'or** que l'on retrouve en particulier en architecture pour caractériser des proportions harmonieuses.*

Raisonner, démontrer

33 Voici quatre équations :

(E_1) $1-(x-5)^2=0$ (E_2) $3x^2-x(x-1)=0$

(E_3) $2(x-4)(x+2)=0$ (E_4) $2(x-3)+5x-4=0$

1. a) En développant mentalement (et partiellement) les membres de gauche, déterminer la seule de ces équations qui ne comporte pas de terme en x^2.

b) Résoudre alors cette équation.

2. a) Pourquoi résoudre l'équation (E_3) équivaut à résoudre l'équation $(x-4)(x+2)=0$?

b) Résoudre alors cette équation.

3. a) Pour les deux équations restantes, factoriser le membre de gauche.

b) Résoudre alors ces équations.

34 f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=2x(x-1) \text{ et } g(x)=-3x+3.$$

a) Tracer à l'écran de la calculatrice les courbes représentatives des fonctions f et g.

b) Conjecturer graphiquement les solutions de l'équation $f(x)=g(x)$.

c) Résoudre algébriquement l'équation $f(x)=g(x)$.

d) En déduire les coordonnées des points d'intersection des deux courbes.

35 On se propose de trouver les antécédents de 0 par la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=(3x+1)(6x-9)-(2x-3)^2.$$

a) Écrire une équation permettant de résoudre ce problème.

b) Factoriser $6x-9$.

c) En déduire une factorisation de $f(x)$ et la réponse à la question posée.

36 Calcul mental et réfléchi (sans calculatrice)

Les trois questions sont indépendantes.

a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=43x-42^2$. Quelle est l'image de 41 par f ?

b) Quelle est la solution de l'équation :

$$(x+2)^2-(x+1)^2=1\ ?$$

c) Combien vaut le produit 9 998   10 002 ?

37 B2i L 3-4 **a)** Créer une feuille de calcul sur le modèle ci-contre. La colonne A contient des nombres quelconques et dans la cellule B1, on a indiqué une formule à saisir.

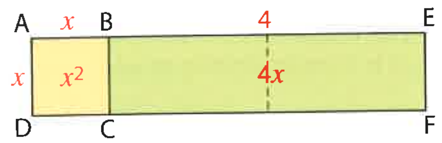
	A	B
1	1	=A1^2-(A1+5)*(A1-5)
2	5	
3	8	
4	10	
5	248	

Observer les résultats obtenus et émettre une conjecture.

c) Écrire sous forme algébrique la conjecture émise à la question **b)**.

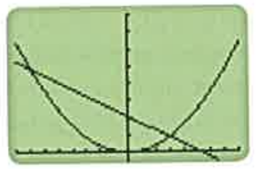
d) Démontrer ce résultat.

38 **1.** Le mathématicien arabe al-Khuwārizmī (IX^e siècle) cherchait la longueur 7 telle que l'aire du rectangle AEFD ci-dessous soit égale à 21.



a) Vérifier que 7 est solution de l'équation $x^2=-4x+21$.

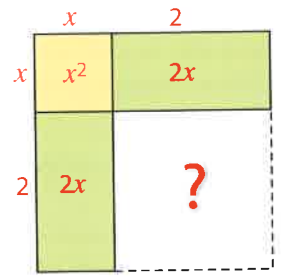
b) Voici les courbes d'équations $y=x^2$ et $y=-4x+21$ à l'écran d'une calculatrice.



Sachant que la fenêtre graphique montre des valeurs de x dans l'intervalle $[-8\,;+8]$, proposer une résolution graphique de cette équation.

Valider par le calcul les solutions proposées.

c) Pour résoudre son problème al-Khuwārizmī a eu l'idée de découper BEFC en deux rectangles de mêmes dimensions (x et 2) et de former le grand carré ci-contre. Recopier et compléter l'égalité : $x^2+4x=(x+2)^2-\ldots$



d) En déduire la résolution algébrique de l'équation et le nombre de solutions du problème de al-Khuwārizmī.

2. En utilisant l'égalité de la question **1. c)**, résoudre algébriquement les équations :

a) $x^2=-4x+3$; **b)** $x^2+4x=-1$; **c)** $x^2+4x=-5$.

39 B2i L 1-1 Une balle est lancée en l'air à un instant initial de date $t=0$. On établit que son altitude (en mètres) après t secondes est $h(t)=-5t^2+4t+1$.

Problème : La balle atteindra-t-elle l'altitude de 2 m ?

1. a) À quelle altitude la balle a-t-elle été lancée ?

b) Quelle est l'altitude de la balle après une seconde ? Interpréter la réponse dans le contexte de l'exercice.

2. Afin de résoudre le problème posé, on se propose de visualiser avec un logiciel de géométrie dynamique les différentes positions de la balle en fonction du temps t sur l'intervalle $[0\,;1]$.

a) Créer pour cela une variable libre, que l'on notera t, dans l'intervalle $[0\,;1]$.

b) Placer le point M de coordonnées $(t\,;-5t^2+4t+1)$. Observer la trace du point M lorsque t varie.

c) Afficher le lieu des points M lorsque t varie ; ce lieu est la trajectoire du point M. Répondre alors au problème posé.

3. Après une seconde, la balle rebondit et on établit que son altitude en mètres est alors :

$$k(t)=-5t^2+14t-9 \quad \text{pour} \quad t\in[1\,;1{,}8].$$

Visualiser alors ce rebond avec le logiciel de géométrie.

40 On se propose de résoudre l'équation (E) :

$$\sqrt{x^2+x+1}=x.$$

a) Expliquer pourquoi cette équation ne peut pas admettre de solution négative.

b) On cherche donc les solutions positives.

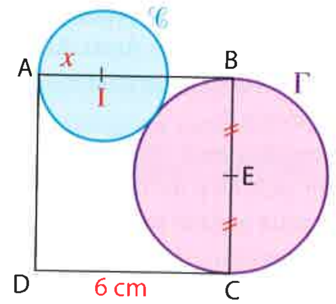
- Expliquer pourquoi si $x\geqslant 0$, alors $x^2+x+1\geqslant 0$.
- Expliquer pourquoi alors, résoudre l'équation (E) équivaut à résoudre l'équation $x^2+x+1=x^2$ avec $x\geqslant 0$.
- Résoudre cette équation.
- Conclure sur l'ensemble des solutions de (E).

41 ABCD est un carré de côté 6 cm et E est le milieu du côté [BC].

I est un point quelconque du segment [AB] distinct de A et B. On note AI $=x$ (en cm).

$\mathscr{C}$ est le cercle de centre I qui passe par A.

Γ est le cercle de diamètre [BC].



On se propose de chercher s'il existe un point I tel que $\mathscr{C}$ et Γ soient tangents.

a) Exprimer IE² en fonction de x, puis vérifier que $\mathscr{C}$ et Γ sont tangents lorsque :

$$(x+3)^2=(6-x)^2+3^2.$$

Conseil : utiliser le fait que deux cercles sont tangents extérieurement lorsque la distance des centres est égale à la somme des rayons.

b) Résoudre cette équation.

c) Conclure : existe-t-il un point I de [AB] tel que $\mathscr{C}$ et Γ soient tangents ? Si oui, lequel ou lesquels ?

42 **1. Une équation du second degré**

(E_1) est l'équation $7x^2+10x-8=0$.

a) On pose $f(x)=7x^2+10x-8$.

Tracer la courbe représentative de cette fonction f à l'écran de la calculatrice. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$.

b) Une des solutions de l'équation (E_1) semble être un nombre entier ; lequel ? Vérifier par le calcul.

c) Recopier et compléter :

pour tout réel x, $7x^2+10x-8=(x+2)(\ldots x-\ldots)$.

d) En déduire les valeurs exactes des solutions de (E_1).

2. Un autre cas d'équation du second degré

(E_2) est l'équation $x^2+2x+3=0$.

a) On pose $h(x)=x^2+2x+3$.

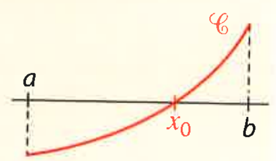
Observer la courbe représentant la fonction h à l'écran de la calculatrice et conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E_2).

b) En remarquant que $x^2+2x=x^2+2x+1-1$, vérifier que résoudre l'équation (E_2) équivaut à résoudre l'équation $(x+1)^2+2=0$. Conclure la résolution de (E_2).

Algorithmique

43 Un algorithme de dichotomie

f est la fonction définie sur un intervalle $[a\,;b]$ représentée ci-contre. On suppose que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle $[a\,;b]$.



On considère l'algorithme suivant :

```
Entrées
Saisir
  a, b : bornes de l'intervalle de définition
  f : fonction étudiée
  N : entier naturel, N ⩾ 1
Traitement
Pour k de 1 jusqu'à N
  m prend la valeur (a+b)/2
  Si f(m) et f(a) sont de même signe alors
    a prend la valeur m
    sinon
    b prend la valeur m
  FinSi
FinPour
Sorties
Afficher a, b
```

a) On applique cet algorithme à la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $f(x)=x^3+2x-2$.

Prendre N = 4 et compléter le tableau suivant.

k		1	2	3	4
m		0,5			
a	0	0,5			
b	1	1			

b) Quel est le rôle de cet algorithme ? Expliquer en particulier la fonction de la variable N.

c) Traduire cet algorithme dans un langage de programmation et tester le programme obtenu.

Analyse critique d'un document

44 Corriger les erreurs dans ces factorisations extraites de copies d'élèves.

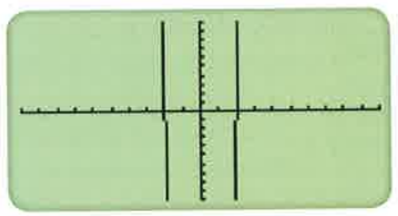
$A(x) = (2+x)(1-x) - 3x(x-1)$
$= (1-x)(2+x-3x)$
$= (1-x)(-2x+2)$
$= 2(x-1)^2$
$B\ (x) = 4(x-1)^2 - 9(4x-4)$
$= [2(x-1) - 3(2x-2)][2(x-1) + 3(2x-2)]$
$= (2x-2-6x-6)(2x-2+6x-6)$
$= (-4x-8)(8x-8)$

45 Travailler en groupe
Voici la copie d'un écran du logiciel AlgoBox.

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  q EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  q PREND_LA_VALEUR (n+2)*(n+2)
  q PREND_LA_VALEUR q-(n+4)
  q PREND_LA_VALEUR q/(n+3)
  AFFICHER q
FIN_ALGORITHME
```

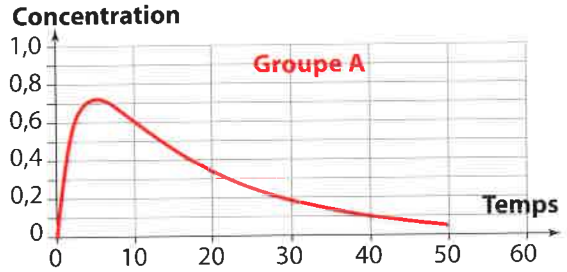
a) Tester cet algorithme avec $n = 4$, puis $n = 7$.
b) Un élève à saisi $n = -3$. Que se passe -t-il ? Pourquoi ?
c) Émettre une conjecture sur le résultat fourni par cet algorithme.
d) Démontrer algébriquement cette conjecture.

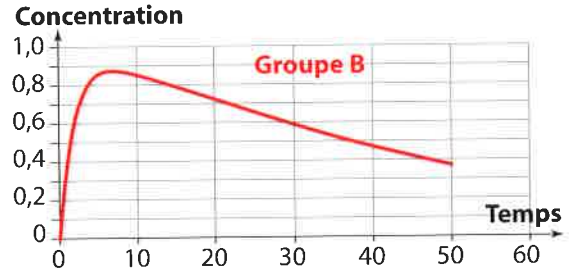
46 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^3 + 20x^2 - 4x - 80.$$
1. Zora a tracé la courbe de f à l'écran de sa calculatrice. Voici ce qu'elle a obtenu :



a) Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
b) Vérifier par le calcul que les nombres lus à l'écran sont bien solutions de cette équation.
2. a) Déterminer un réel b tel que, pour tout réel x :
$$f(x) = (x-2)(x+2)(x+b).$$
b) En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
c) Donner les dimensions d'une fenêtre sur la calculatrice qui permet de visualiser toutes les solutions de cette équation.

47 Travailler en groupe On a administré une même dose de médicament à deux groupes de patients à la date $t = 0$. Le groupe A est constitué de sujets « standards » et le groupe B est constitué de sujets souffrant d'une insuffisance rénale. Les graphiques représentent l'évolution de la concentration moyenne de produit actif du médicament dans le sang (en mg/L) en fonction du temps (en heures).



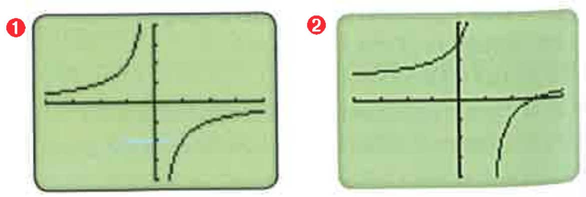


a) Comparer les deux graphiques et commenter. Justifier cette affirmation : « La réadministration du médicament, selon un intervalle identique aux sujets du groupe A et du groupe B, conduirait à des concentrations beaucoup plus élevées dans le groupe B ».
b) Pour que le médicament soit actif, la concentration du produit actif doit être au minimum de 0,5 mg/L. Relever pour chaque groupe la date à partir de laquelle le médicament commence à agir (en moyenne).
c) On réadministre le médicament au patient lorsque la concentration en produit actif descend à 0,4 mg/L. Relever pour chaque groupe la date à partir de laquelle il faut à nouveau administrer le médicament au patient (en moyenne).

Communiquer à l'écrit ou à l'oral

48 Samia et Nicolas ont tracé sur leur calculatrice la courbe de la fonction $f : x \mapsto 1 - \dfrac{2}{x-1}$.

❶ ❷



Samia affirme qu'il n'est pas possible d'obtenir l'image de 1 par f mais Nicolas, lui, annonce que $f(1) = -2$.
a) Quelle est la courbe affichée sur la calculatrice de Samia ? sur celle de Nicolas ?
b) Quel argument algébrique Samia peut-elle utiliser afin de convaincre Nicolas que c'est elle qui a raison ?
c) Quelle erreur Nicolas a-t-il commise ?

49 Travailler en groupe Voici les copies de deux élèves qui ont résolu l'équation $x(x+1) = (3x-5)(x+1)$.

Arthur	Noémie
J'ai tracé sur ma calculatrice les fonctions $f(x) = x(x+1)$ et $g(x) = (3x-5)(x+1)$. J'ai trouvé deux points d'intersection donc il y a deux solutions.	J'ai résolu l'équation. Je divise les deux membres par $(x+1)$. J'obtiens $x = 3x-5$ donc $-2x = -5$ et $x = \frac{5}{2}$. Donc l'équation a une solution $\frac{5}{2}$.

a) Rectifier le vocabulaire utilisé par Arthur. Répond-il complètement à la question ?
b) Quelle est la méthode qui vous convient le mieux ? Expliquer pourquoi en deux ou trois lignes.
c) Relever une erreur de raisonnement sur la copie de Noémie.
d) Le professeur demandait une résolution algébrique de l'équation. Rédiger une réponse correcte.

50 x désigne un nombre réel.
Recopier et compléter ce tableau.

Inégalité	Représentation	Intervalle	Langage naturel
$x \geqslant 2$			
			x est un réel inférieur ou égal à 3
		$x \in [-1;1]$	
			
$-2 \leqslant x < 3$			
		$x \in]0;5[$	
			x est un réel strictement positif
			x est un réel négatif ou nul

S'initier à la logique

51 **Implication et équivalence**
a et b désignent deux nombres réels.
❶ $(a+b)^2 = 0$ ❷ $a = 0$ **et** $b = 0$
Si la proposition ❷ est vraie, alors la proposition ❶ est vraie. On dit que la proposition ❷ **implique** la proposition ❶.
a) La proposition ❶ implique-t-elle la proposition ❷ ?
b) Voici six propositions :
Ⓐ $a^2 = b^2$ Ⓑ $a = b$
Ⓒ $a = -b$ Ⓓ $(a+b)(a-b) = 0$
Ⓔ $a = b$ **ou** $a = -b$ Ⓕ $a = 0$ **ou** $b = 0$
Dans chaque cas, recopier et compléter par le nom de l'une de ces propositions :
- la proposition Ⓐ implique la proposition … ;
- la proposition … implique la proposition Ⓐ ;
- les propositions … et … sont équivalentes.

D'après Pour les mathématiques vivantes en 2de, APMEP

52 **Réunion d'intervalles. Connecteur « ou »**
a) Sur le menu du restaurant scolaire, il est écrit « fromage ou yaourt ». Est-il permis de prendre une portion de fromage et un yaourt ?
b) $D_1 =]-\infty;3[$ et $D_2 = [2;4]$.
x désigne un réel qui appartient à D_1 ou à D_2.
Emma écrit : « C'est-à-dire $x \leqslant 4$ ».
Qu'en pensez-vous ?
c) Comparer les significations du mot « ou » dans le langage courant et le langage mathématique.

> *Info*
> *L'ensemble des réels qui appartiennent à D_1 ou D_2 est **la réunion** des intervalles D_1 et D_2 ; on la note $D_1 \cup D_2$.*

53 **Intersection d'intervalles. Connecteur « et »**
f est la fonction définie sur $D_1 =]-3;5]$ par :
$$f(x) = x^2 + 1.$$
g est la fonction définie sur $D_2 = [-1;7]$ par :
$$g(x) = 2x + 1.$$
On voudrait définir une fonction h par $h(x) = f(x) + g(x)$.
a) Pour quelles valeurs de x le nombre $h(x)$ est-il défini ?
b) Représenter D_1 et D_2 sur une droite graduée.
c) On note D l'ensemble de définition de la fonction h. Compléter avec une conjonction de coordination :
($x \in D$) équivaut à ($x \in]-3;5]$ … $x \in [-1;7]$).
d) Écrire D sous la forme d'un intervalle.

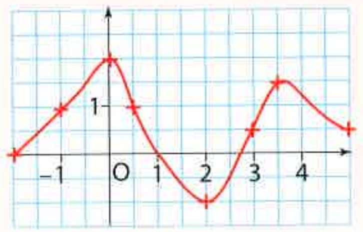
> *Info*
> *On dit que D est **l'intersection** des intervalles D_1 et D_2 et on écrit $D =]-3;5] \cap [-1;7]$.*

SE PRÉPARER AU CONTRÔLE

Travailler en autonomie

QCM

54 Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Laquelle ?
On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2\,;5]$.



1 $f(3)$:
a) est égal à 1 **b)** est égal à 0,5 **c)** n'existe pas

2 L'équation $f(x) = 2$ a pour solution :
a) 0 **b)** –1 **c)** 2

3 L'équation $f(x) = 0$ admet :
a) une solution **b)** trois solutions **c)** aucune solution

4 Le nombre 1 :
a) admet un seul antécédent **b)** admet quatre antécédents **c)** admet deux antécédents

55 Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Laquelle ? Justifier.

1 L'équation $-\frac{1}{3}x = 0$ a pour solution : **a)** –3 **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** 0

2 L'équation $x - 2(7 + x) = 0$ a pour solution(s) : **a)** 2 et –7 **b)** –7 **c)** –14

3 L'équation $2(x - 3)(x^2 + 1) = 0$ a pour solution(s) : **a)** 3 **b)** 3 et –1 **c)** 2 et 3

4 L'équation $(2x - 3)(x + 1) = (2x - 3)^2$ a pour solution(s) : **a)** $\frac{3}{2}$ **b)** $\frac{3}{2}$ et 4 **c)** $\frac{3}{2}$ et –2

Exercices interactifs

Vrai-Faux

56 f désigne une fonction. Dire pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse.

a) Il est possible que la courbe représentative de la fonction f dans un repère soit un cercle.

b) Un nombre réel peut avoir deux images par la fonction f.

c) Deux nombres réels peuvent avoir la même image par la fonction f.

d) Résoudre l'équation $f(x) = 4$, c'est calculer f pour $x = 4$.

57 Dire pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse. Justifier.

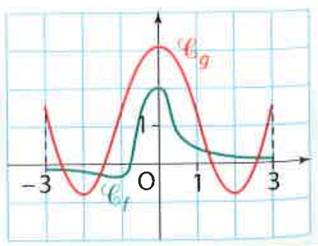
a) L'équation $x^2 + 9 = 0$ a pour solutions –3 et 3.

b) Le nombre 0 admet deux antécédents par la fonction $x \mapsto \frac{x^2 - 5}{2x}$.

c) 1 est un antécédent de 0 par la fonction $x \mapsto \frac{x^2 - x}{x - 1}$.

d) Il n'existe pas de réel x tel que $(x + 1)^2 = x^2$.

e) Dans le repère ci-contre, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $[-3\,;3]$. L'équation $f(x) = g(x)$ a cinq solutions.



Exercices interactifs

Pour réviser

58 **Utiliser le vocabulaire des fonctions**
On sait que la fonction f vérifie les conditions suivantes :
- son ensemble de définition est $D = [-5\,;4]$;
- les nombres –4 et 4 ont la même image 3 ;
- les solutions de l'équation $f(x) = -2$ sont 1 et 2 ;
- le nombre –5 est un antécédent de 0 par f ;
- $f(-2) = -1$, $f(0) = -3$ et $f(3) = 0{,}5$.

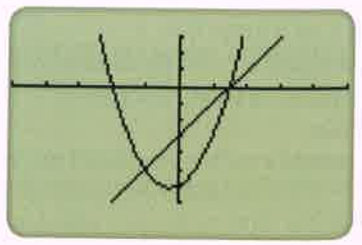
Tracer à main levée une courbe pouvant représenter la fonction f.

Conseils
• Sur quel axe du repère lit-on l'ensemble de définition ?
• Exploiter les autres conditions pour remplir un tableau de valeurs de $f(x)$. Il facilitera le tracé d'une courbe possible.

59 **Utiliser la calculatrice**
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x - 1)^2 - 5 + 2x$.
a) Réaliser avec la calculatrice une table des valeurs de $f(x)$ sur $[-1\,;3]$ avec un pas de 0,5.
b) L'équation $f(x) = 0$ semble-t-elle admettre des solutions ?
c) Résoudre graphiquement cette équation avec la calculatrice.
d) Résoudre algébriquement l'équation $f(x) = 0$.

Conseils
a) Revoir l'exercice résolu 1, page 43. Saisir correctement la fonction (attention aux parenthèses et à la touche $\boxed{-}$ d'opération).
c) Revoir l'exercice résolu 2, page 43.
d) Pour résoudre algébriquement, commencer par développer et réduire $f(x)$. Factoriser ensuite.

60 **Résoudre une équation $f(x) = g(x)$**
Avec une calculatrice, on a représenté sur l'intervalle $[-5\,;5]$ les fonctions :
$f\colon x \mapsto (2x - 3)(x + 2)$ et $g\colon x \mapsto 2x - 3$.



a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.
b) Résoudre algébriquement cette équation.

Conseils
a) Revoir l'exercice résolu 2, page 43.
b) Il faut factoriser la différence $f(x) - g(x)$ en laissant bien $g(x)$ entre parenthèses. On reconnaît un facteur commun. Une fois factorisé, il faut penser à appliquer la règle du produit nul.

61 **Choisir une forme adaptée**
f est la fonction définie sur l'intervalle $[-2\,;5]$ par :
$f(x) = (3x - 5)^2 - 4x^2$ (forme 1).
1. a) Factoriser l'expression de $f(x)$ (forme 2).
b) Développer l'expression de $f(x)$ (forme 3).
2. Utiliser la forme la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes.
a) Quelle est l'ordonnée du point C de la courbe représentative de f qui a pour abscisse $\sqrt{2}$?
b) Quelles sont les coordonnées des points d'intersection de cette courbe avec les axes du repère ?
c) Résoudre l'équation $f(x) = 25$.

Conseils
1. a) Remarquer que $4x^2$ est le carré de $2x$ et utiliser une identité remarquable pour factoriser.
b) Utiliser une identité remarquable pour développer ; en particulier, bien écrire le carré de $3x$.
2. a) L'ordonnée du point C est $f(\sqrt{2})$.
b) • Les points de l'axe des ordonnées ont une abscisse nulle.
• Les points de l'axe des abscisses ont une ordonnée nulle, donc pour trouver les points communs à la courbe et à l'axe des abscisses, on résout l'équation….

62 **Utiliser une équation de courbe**
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{1 - x}{1 + x^2}.$$
$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère.
a) Le point A $(-2\,;0{,}6)$ appartient-il à $\mathscr{C}$?
b) Le point B $(3\,;-0{,}5)$ appartient-il à $\mathscr{C}$?

Conseils
• Ici, un point $M(x\,;\,y)$ appartient à $\mathscr{C}$ si, et seulement si, $y = f(x)$.

Vérifier les réponses p. 300

Exercices d'approfondissement

Pour aller plus loin

63 Avec un guide (1)

f est la fonction définie sur $D =]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{(5x-2)^2}{4x}.$$

a) Tracer la courbe représentative de f sur la calculatrice.

b) Déterminer, en utilisant une résolution graphique, une valeur approchée des nombres qui sont égaux à leurs images par f.

c) Déterminer algébriquement les nombres x strictement positifs qui sont égaux à leur image par f.

Guide de résolution

a) Une fenêtre graphique avec X > 0 et Y > 0 suffit.
b) Il s'agit de résoudre graphiquement l'équation $f(x) = x$. Il faut donc tracer la représentation graphique de la fonction $x \mapsto x$.
c) On expliquera pourquoi résoudre $f(x) = x$ dans $]0\,;+\infty[$ équivaut à résoudre l'équation $(5x-2)^2 = 4x^2$ dans $]0\,;+\infty[$.

64 Avec un guide (2)

Un rectangle a un périmètre égal à 8 m et une aire égale à 1 m². On se propose de déterminer les dimensions x et y de ce rectangle.

1. Expliquer pourquoi la situation se traduit par :

$$\begin{cases} xy = 1 \\ x + y = 4 \end{cases} \quad \text{avec } x > 0 \text{ et } y > 0$$

2. Montrer que les valeurs possibles de x vérifient :

$$\frac{1}{x} = -x + 4 \quad \text{avec } x > 0.$$

3. a) Résoudre graphiquement cette équation.

b) En déduire une résolution approchée du problème posé.

4. a) Développer $(x-2)^2 - 3$.

b) En déduire les valeurs exactes de x et y.

Guide de résolution

1. Les longueurs sont des nombres positifs. Le périmètre du rectangle est $2(x + y)$.
2. Les nombres x et y cherchés vérifient $y = \frac{1}{x}$ et $y = 4 - x$.
3. Les valeurs possibles de x sont les abscisses des points d'intersection des courbes des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto -x + 4$. Une calculatrice donne deux valeurs de x possibles ; on calcule y dans chaque cas.
4. b) On expliquera pourquoi l'équation de la question **2.** s'écrit $x^2 - 4x + 1 = 0$.

65 Nombres et calculs algébriques

a) Calculer A = 50 000 006   70 000 008 avec la calculatrice et recopier sur la copie le résultat obtenu. Pourquoi sait-on que ce résultat n'est pas la valeur exacte de A ?

b) Vérifier que A s'écrit aussi :

$$A = (5\ \ 10^7 + 6)(7\ \ 10^7 + 8).$$

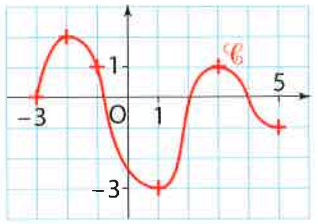
Développer cette expression et en déduire que :

$$A = 3\,500\,000\,820\,000\,048.$$

c) Par une méthode analogue, déterminer la valeur exacte de $B = (3\ \ 10^{-6} + 1)(10^{-6} + 1)$. On donnera un résultat exprimé avec les puissances de 10, puis l'écriture décimale de B.

66 Courbes et horizontales

Dans un repère, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3\,;5]$.



1. Indiquer le nombre de solutions de chacune des équations suivantes.

a) $f(x) = 3$ **b)** $f(x) = 2$ **c)** $f(x) = 1{,}5$
d) $f(x) = 1$ **e)** $f(x) = 0$ **f)** $f(x) = -0{,}2$
g) $f(x) = -2{,}3$ **h)** $f(x) = -3$ **i)** $f(x) = -3{,}1$

2. Préciser les valeurs du réel m pour lesquelles l'équation $f(x) = m$ possède :

a) aucune solution **b)** 1 solution **c)** 2 solutions
d) 3 solutions **e)** 4 solutions

Algorithmique

67 Un algorithme de tracé de courbe

f est une fonction définie sur un intervalle $[a\,;b]$. On étudie l'algorithme suivant.

```
Entrées
Saisir
a, b : bornes de l'intervalle de définition
f : fonction étudiée
N : entier naturel, N ⩾ 1
Initialisations
pas prend la valeur (b − a)/N
x prend la valeur a
Traitement
Pour k de 0 jusqu'à N
    | Marquer le point de coordonnée (x ; f(x))
    | x prend la valeur x + pas
FinPour
```

1. Faire fonctionner l'algorithme dans les cas suivants.

a) f définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $f(x) = -3x^2 + 2x$ en prenant N = 10.

b) f définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 1 & \text{si } x \in [0\,;1[\\ f(x) = x + 1 & \text{si } x \in [1\,;2] \end{cases}$$

en prenant N = 20.

2. Expliquer le rôle et le fonctionnement de cet algorithme.

3. On modifie l'algorithme précédent. Le traitement est alors le suivant :

```
Traitement
Pour k de 1 jusqu'à N
    | Tracer le segment de (x ; f(x))
    | à (x + pas ; f(x + pas))
    | x prend la valeur de x + pas
FinPour
```

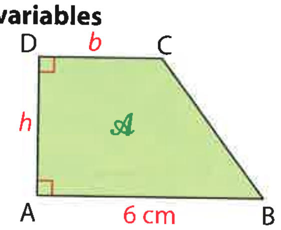
Faire fonctionner l'algorithme avec les fonctions de la question **1.** Que remarque-t-on dans le cas **b)** ?

4. Traduire le dernier algorithme dans un langage de programmation et tester le programme obtenu.

68 Une fonction à deux variables

ABCD est un trapèze rectangle en A et D tel que AB = 6 cm et CD < AB.

On note b la longueur CD, h la hauteur du trapèze (en cm) et $\mathscr{A}$ son aire (en cm²).



1. Exprimer l'aire $\mathscr{A}$ en fonction de b et h.

2. Dans chacun des cas suivants, construire un trapèze vérifiant les conditions données et calculer $\mathscr{A}$.

a) $b = 2$ et $h = 5$ **b)** $b = 3{,}5$ et $h = 4$ **c)** $b = 5{,}2$ et $h = 3{,}5$

3. À quels intervalles respectifs I et J doivent appartenir b et h ?

4. À chaque couple $(b\,;h)$ avec b dans I et h dans J, on associe une valeur unique de l'aire $\mathscr{A}$ du trapèze. On définit ainsi une fonction f à deux variables :

$$f\colon (b\,;h) \mapsto \mathscr{A}.$$

a) Calculer $f(2\,;3)$, c'est-à-dire l'aire du trapèze de base $b = 2$ et de hauteur $h = 3$.

Calculer de même $f(2\,;4)$, $f(4\,;3{,}6)$, $f(5\,;3{,}6)$.

b) On pose $h = 2$.

Tracer dans un repère la courbe représentative de la fonction qui à b associe $\mathscr{A}$.

c) On pose $b = 4$.

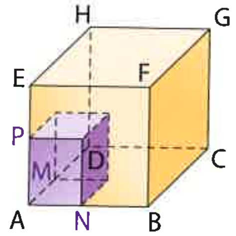
Tracer dans un repère la courbe représentative de la fonction qui à h associe $\mathscr{A}$.

69 Représenter l'évolution d'un volume

ABCDEFGH est un cube de côté 8 cm.

M et N sont des points des arêtes [AD] et [AB] tels que AM = AN = x (en cm).

P est le point de l'arête [EA] tel que EP = x (en cm).



1. On note $V(x)$ le volume, en cm³, du parallélépipède rectangle représenté en violet sur la figure.

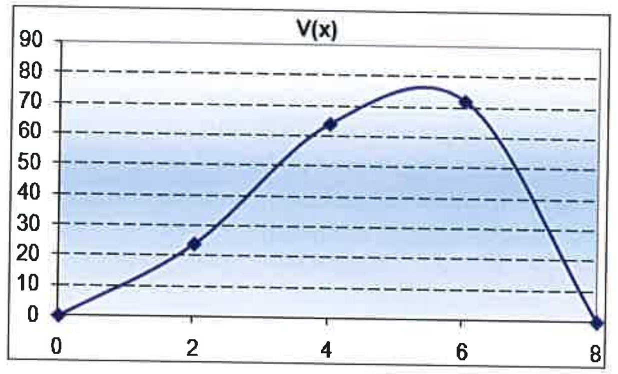
a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction V ?

b) Exprimer $V(x)$ en fonction de x.

2. On se propose de représenter la fonction V sur une feuille de papier millimétré.

a) Avec un tableur, réaliser une table de valeurs de la fonction avec un pas de 2.

b) Dans un repère (*unités* : 1 cm en abscisses et 0,2 cm en ordonnées), construire le nuage de points associés à ce tableau et proposer à main levée un tracé de la courbe de V. Sur la figure ci-dessous, on peut voir le tracé obtenu avec le tableur.



c) Afin d'affiner le tracé, modifier la feuille de calcul de façon à obtenir une table avec un pas de 1. Placer sur la feuille de papier les nouveaux points obtenus et rectifier le tracé précédent.

d) Réaliser une table avec un pas de 0,5 et affiner à nouveau le tracé de la courbe.

Algorithmique

3. On considère l'algorithme suivant :

```
Entrée
Saisir
N : nombre d'étapes de la construction du nuage
Initialisation
L : longueur de l'intervalle entre deux points
L prend la valeur 8
Traitement
Pour k de 1 jusqu'à N
    | L prend la valeur L/2
    | x prend la valeur 0
    | Tant que x ⩽ 8
    |     | Marquer le point de coordonnées (x ; f(x))
    |     | x prend la valeur x + L
    | FinTantque
FinPour
```

a) Que donne cet algorithme pour N = 1 ? N = 2 ? N = 4 ?
b) Pour quelles valeurs de N ne pourra-t-on pas distinguer deux abscisses consécutives sachant que l'œil ne discerne pas des points situés à moins de 0,5 mm l'un de l'autre ?

PROBLÈMES OUVERTS

70 Triangle rectangle et carré

ABC est un triangle isocèle en A et de périmètre 16 cm. De plus, son aire est égale au quart de l'aire du carré construit sur sa base [BC].
Quelles sont les longueurs des côtés de ce triangle ?

71 Tracer la courbe d'une fonction géométrique

Dans un repère, A est le point de coordonnées (–3 ; 0) ; B est le point de coordonnées (–3 ; t) où t est une variable libre dans l'intervalle [0 ; 10].
H est le pied de la hauteur issue de A du triangle OAB.
L'aire du triangle AHO est notée $\mathscr{A}(t)$.

1. Réaliser une figure avec un logiciel de géométrie.
2. a) Pourquoi a-t-on ainsi défini une fonction $\mathscr{A}$? Quel est son ensemble de définition ?
b) Tracer la droite (AB) et animer la figure.
Que remarque-t-on ? Pourquoi ?
3. Afficher la courbe représentative de la fonction $\mathscr{A}$ qui à chaque réel t de l'intervalle [0 ; 10] associe l'aire $\mathscr{A}(t)$ du triangle.

Des défis

72 Sur l'ensemble des entiers naturels

La fonction f est définie pour des valeurs entières par :

$$\begin{cases} f(n) = \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ f(n) = 2n + 7 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Calculer $f(5n) - 5f(n)$ pour tout entier n.

La Recherche, Spécial Jeux 2007-08

73 Somme et pointillés

Pour tout réel x,
$f(x) = x - (x + 1) + (x + 2) - (x + 3) + \ldots + (x + 2008) - (x + 2009)$.
Calculer l'image de 2 231 par f.

SUJETS D'EXPOSÉS

SUJET 1

MPS Méthodes et pratiques scientifiques

→ Effectuer des recherches au CDI ou sur Internet sur la trajectoire d'un point de la roue d'un vélo qui roule à vitesse constante (un chewing-gum collé à la roue par exemple).

→ Explorer le mode paramétrique de votre calculatrice afin de représenter cette trajectoire à l'écran.
Lors d'un exposé, présenter le résultat de vos recherches à la classe.

SUJET 2

→ Effectuer des recherches au CDI ou sur Internet afin d'obtenir l'évolution, en fonction du temps, du cours de bourse d'une action (par exemple l'action EDF) sur plusieurs périodes :
- depuis la date de son introduction en bourse jusqu'à août 2008 ;
- depuis la date de son introduction en bourse jusqu'à aujourd'hui ;
- depuis avril 2009 jusqu'à aujourd'hui ;
- sur une semaine donnée.

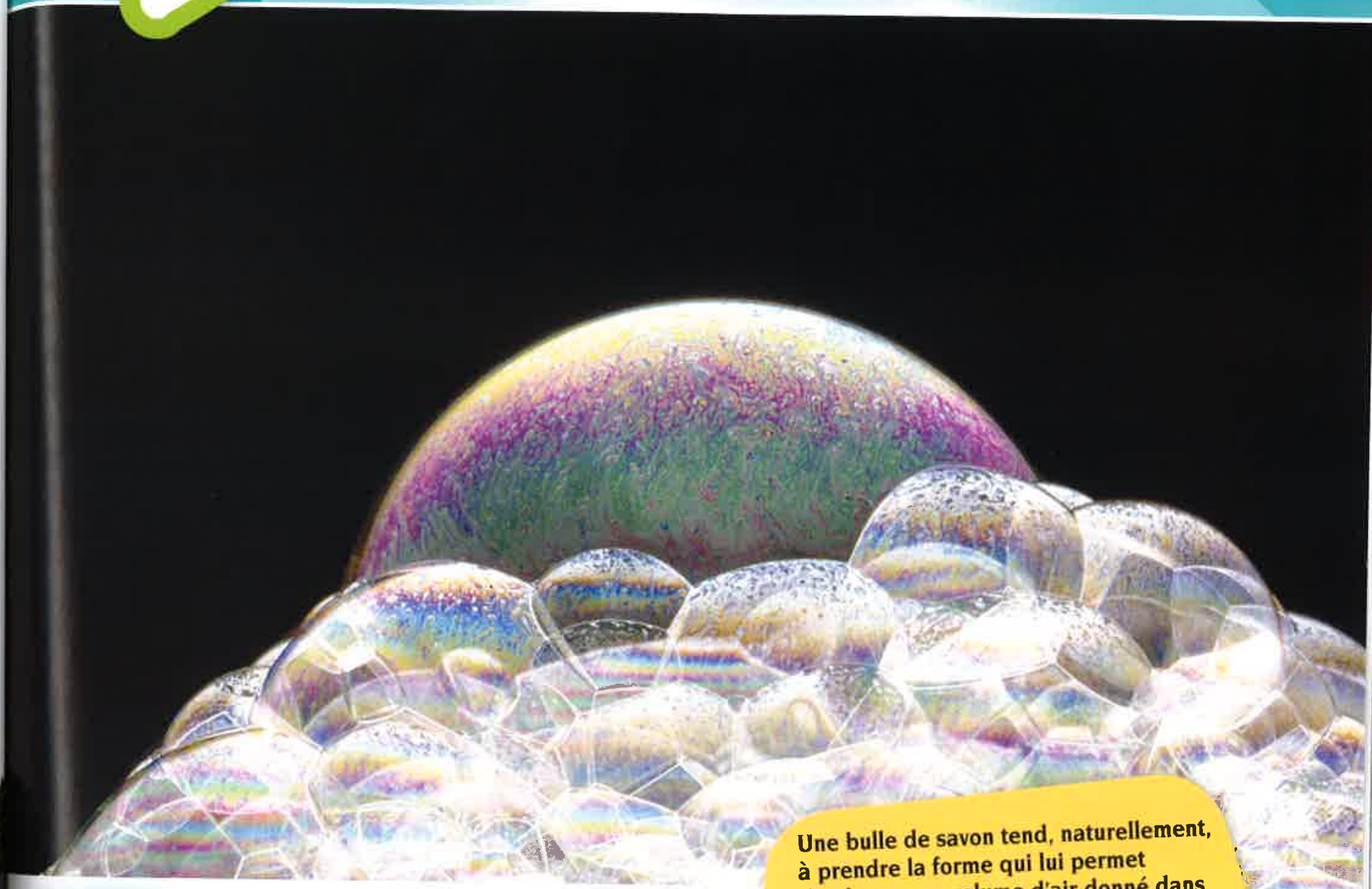
→ Commenter les résultats obtenus. Avez-vous observé des fonctions définies sur [0 ; +∞[?

→ Effectuer à nouveau des recherches sur les moyens mis en œuvre pour effectuer des prévisions sur les cours de l'action dans un futur proche.

→ Lors d'un exposé, présenter le résultat de vos recherches à la classe.

Chapitre 3

Variations de fonctions et problèmes



Une bulle de savon tend, naturellement, à prendre la forme qui lui permet d'enfermer un volume d'air donné dans une surface d'aire minimale.

Énigme ★

Avec cette grille, on forme des mots de 7 lettres au plus en prenant une lettre dans chaque colonne, de gauche à droite.
On code ce mot en indiquant de combien de lignes on se déplace de la 1re à la 2e lettre, puis de la 2e lettre à la 3e lettre, et ainsi de suite (si le nombre est positif, on monte, sinon on descend).

B	E	X	N	T	U	L
M	R	O	I	N	I	S
N	A	E	A	U	G	M
D	I	G	Z	M	E	F

Par exemple, BIEN est codé :

–3	1	2

➤ *Coder le mot DROITES.*

➤ *Et maintenant, décoder ce mot de 7 lettres :*

–1	2	–1	–2	3	–2

Énigme ★★

➤ ***Si l'on sait qu'une grandeur ne cesse d'augmenter au cours du temps, peut-on affirmer qu'il suffit d'être patient pour qu'elle devienne aussi grande que l'on veut ?***