1 Calculer des images et des antécédents
Formulaire p. 285, thème 11

f et g sont deux fonctions définies par $f(x) = 3x + 5$ et $g(x) = x^2 - 3x + 5$.

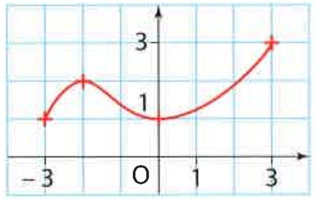
a) Calculer $f(2)$ et $g(-3)$.

b) Quel est le nombre dont l'image est 1 par la fonction f ?

2 Lire graphiquement
Formulaire p. 285, thème 11

La courbe ci-contre définit une fonction f sur l'intervalle $[-3 ; 3]$.
Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse.

a) $f(-2) < f(-1)$ **b)** $f(0) < f(2)$ **c)** $f(-2) < f(0)$



3 Reconnaître des fonctions affines et linéaires
Formulaire p. 285, thème 11

Parmi les fonctions dont les expressions algébriques sont données ci-dessous, indiquer celles qui sont affines. Préciser si, parmi celles-ci, certaines sont des fonctions linéaires.

$$f(x) = x\sqrt{3} + 2 ; \quad g(x) = 1{,}25x ; \quad h(x) = \pi ; \quad k(x) = 2x^2 + 3 ; \quad l(x) = (x+5)^2 - (x+2)^2$$

4 Étudier le signe de la différence

f est la fonction affine définie par $f(x) = 2x - 3$.

a) Calculer $f(5) - f(1)$. En déduire la comparaison de $f(5)$ et $f(1)$.

b) a désigne un nombre.
Exprimer $f(a+1) - f(a)$ en fonction de a. En déduire la comparaison de $f(a+1)$ et $f(a)$.

5 Tracer la représentation graphique d'une fonction affine
Formulaire p. 285, thème 11

Dans un repère, tracer la représentation graphique des fonctions affines définies par :

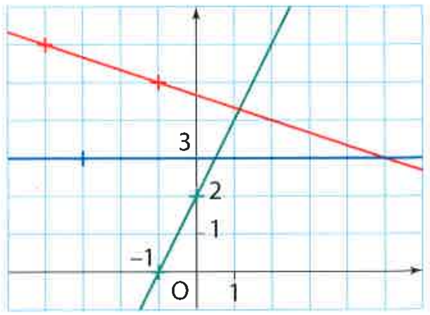
$$f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2} ; \quad g(x) = 2 ; \quad h(x) = \frac{1}{2}x + 3 ; \quad k(x) = -\frac{3}{4}x .$$

6 Déterminer graphiquement une fonction affine
Formulaire p. 285, thème 11

Trois fonctions affines sont représentées sur le graphique ci-contre.

a) Lire le coefficient directeur de chacune de ces droites.

b) Donner l'expression algébrique de chacune de ces fonctions affines.



7 Connaître les propriétés des fonctions affines

Dans chaque cas, dire si le tableau de valeurs peut être celui d'une fonction affine.

a)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	5	2	1	2	5

b)

x	-4	-1	0	1	3
$g(x)$	2	$0{,}5$	0	$-0{,}5$	$-1{,}5$

c)

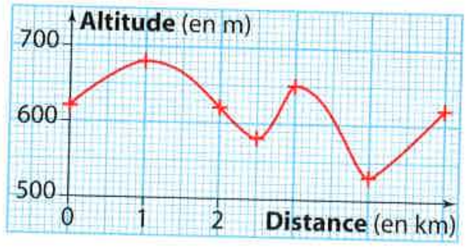
x	1	3	6	8	9
$h(x)$	5	9	15	19	21

Vérifier les réponses p. 296

Objectif
Introduire les variations d'une fonction et la notion de maximum et minimum.

1 Une petite randonnée

Ce graphique indique l'altitude atteinte en fonction de la distance parcourue, lors d'une promenade de 5 km.



a) Sur quels tronçons du parcours le promeneur monte-t-il ? descend-il ?

b) Quelle est l'altitude maximale de la promenade ? l'altitude minimale ? À quelles distances ces altitudes sont-elles atteintes ?

c) On a commencé à représenter dans un tableau les variations de l'altitude en fonction de la distance parcourue.
Recopier et compléter ce tableau.

Distance	0	1	…	…	…	5
Altitude	620 ↗	680				

d) Quelle est l'altitude minimale pendant les trois premiers kilomètres ?

e) Combien de fois le promeneur passe-t-il en dessous de 600 m d'altitude ?

f) La promenade peut-elle être un « aller-retour » ? Peut-elle être une « boucle » ?

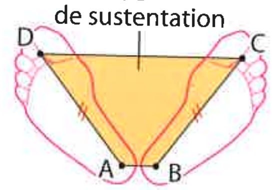
Objectif
Conjecturer les réponses à un problème géométrique en construisant dynamiquement la représentation graphique d'une fonction.

B2i L1-1 L1-4

2 Le meilleur équilibre

Lorsque les deux pieds sont posés au sol, s'ils ne sont pas parallèles, on se sent plus stable, mais il ne faut pas exagérer l'angle qu'ils forment.

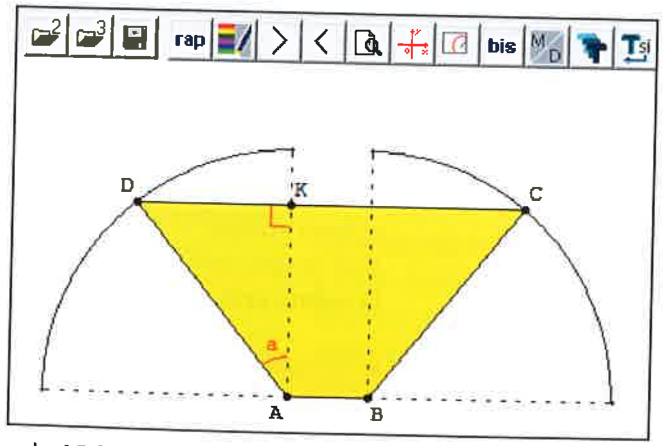
Polygone de sustentation



On se propose de déterminer la position pour laquelle l'aire du trapèze isocèle ABCD est maximale.
On suppose par la suite que AB = 10 cm et AD = BC = 30 cm.

a) Réaliser cette figure avec un logiciel de géométrie dynamique : le point D est libre sur un quart de cercle de centre A et de rayon 30 cm.

b) Faire afficher la mesure a de l'angle $\widehat{DAK}$ et l'aire (notée aire ou poly 1 ou…) du trapèze ABCD.



c) Créer le point M de coordonnées (a ; aire) et afficher la trace de M lorsque D décrit le quart de cercle.

d) Lire une valeur approchée de a pour laquelle l'aire de ABCD est maximale.

e) Recopier et compléter :

- « Lorsque a augmente de … à …, l'aire de ABCD augmente de … à … . »
- « Lorsque a augmente de … à …, l'aire de ABCD diminue de … à … . »

Sens de variation et extremums

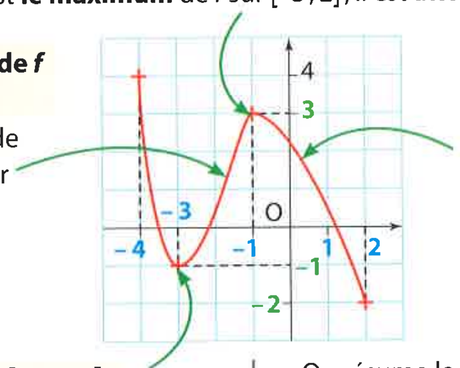
1 Idées intuitives

Note
Les termes « monte », « descend », « bas » se réfèrent bien sûr à un repère dont les axes sont orientés de façon classique (comme sur le graphique).

f est la fonction définie sur l'intervalle $[-4;2]$ par la courbe ci-dessous.

Maximum de f sur $[-3;2]$.
Le point de coordonnées $(-1;3)$ est « le plus haut » de la courbe sur $[-3;2]$. On dit que 3 est **le maximum** de f sur $[-3;2]$; il est atteint en -1.

Sens de variation de f sur $[-3;-1]$.
La courbe « monte de gauche à droite » sur $[-3;-1]$. On dit que f est **croissante** sur $[-3;-1]$.



Sens de variation de f sur $[-1;2]$.
La courbe « descend de gauche à droite » sur $[-1;2]$. On dit que f est **décroissante** sur $[-1;2]$.

Minimum de f sur $[-4;-1]$.
Le point de coordonnées $(-3;-1)$ est « le plus bas » de la courbe sur $[-4;-1]$. On dit que -1 est **le minimum** de f sur $[-4;-1]$; il est atteint en -3.

On résume le sens de variation de f dans **un tableau de variation**.

x	-4		-3		-1		2
$f(x)$	4	↘	-1	↗	3	↘	-2

se lisent sur l'axe des abscisses

se lisent sur l'axe des ordonnées

2 Traductions algébriques

Animation numérique

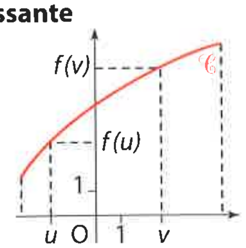
f est une fonction définie sur un intervalle I, de courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère.

DÉFINITIONS

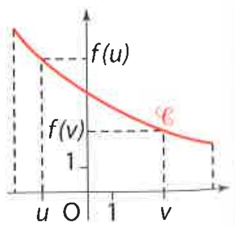
Dire que f est **croissante sur I** signifie que pour tous nombres réels u et v de I, si $u \leqslant v$, alors $f(u) \leqslant f(v)$.

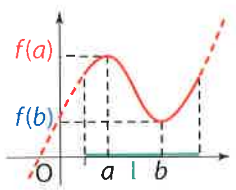
Dire que f est **décroissante sur I** signifie que pour tous nombres réels u et v de I, si $u \leqslant v$, alors $f(u) \geqslant f(v)$.

Une fonction croissante conserve l'ordre.
Deux réels quelconques de I et leurs images sont rangés dans **le même ordre.**



Une fonction décroissante change l'ordre.
Deux réels quelconques de I et leurs images sont rangés dans **des ordres contraires.**





$f(a)$ maximum et $f(b)$ minimum de f sur I.

DÉFINITIONS a désigne un nombre réel de l'intervalle I.

Dire que $f(a)$ **est le maximum** de f sur I signifie que, pour tout réel x de I :
$f(x) \leqslant f(a)$.

Dire que $f(a)$ **est le minimum** de f sur I signifie que, pour tout réel x de I :
$f(a) \leqslant f(x)$.

VOCABULAIRE : On dit que $f(a)$ est **un extremum** de f sur I pour indiquer que $f(a)$ est un maximum ou un minimum de f sur I.

Exercice résolu 1 Passer du tableau de variation à une courbe

Voir aussi les exercices 3 et 4, page 66

Animation numérique

Énoncé

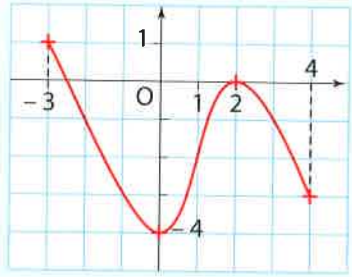
Voici le tableau de variation d'une fonction g définie sur l'intervalle $[-3;4]$.

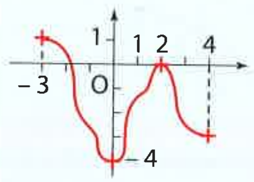
x	-3		0		2		4
$g(x)$	1	↘	-4	↗	0	↘	-3

a) Décrire les variations de la fonction g.
b) Comparer lorsque cela est possible :
• $g(-3)$ et $g(-1)$ • $g(1)$ et $g(3)$
c) Lire le maximum de g sur $[0;4]$ et le minimum de g sur $[-3;4]$.
d) Tracer une courbe susceptible de représenter graphiquement la fonction g.

Solution

a) g est décroissante sur $[-3;0]$, croissante sur $[0;2]$ et décroissante, sur $[2;4]$.
b) • -3 et -1 appartiennent à $[-3;0]$. Or $-3 \leqslant -1$, donc $g(-3) \geqslant g(-1)$ car g est décroissante sur $[-3;0]$ (« deux réels et leurs images sont rangés dans des ordres contraires »).
• Sur l'intervalle $[1;3]$, la fonction g n'est ni croissante, ni décroissante donc on ne peut pas comparer $g(1)$ et $g(3)$.
c) • Le maximum de g sur $[0;4]$ est $g(2)$, c'est-à-dire 0.
• Le minimum de g sur $[-3;4]$ est $g(0)$, c'est-à-dire -4.
d) La courbe ci-contre est une représentation possible de la fonction g.





Cette courbe est une autre représentation possible de la fonction g.

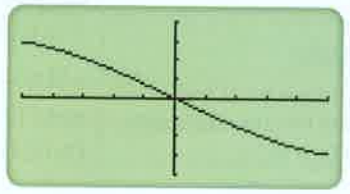
Exercice résolu 2 Éviter des erreurs

Voir aussi l'exercice 9, page 67

Énoncé

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{144}x^3 - \frac{3}{4}x$$

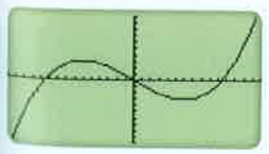


Voici sa courbe représentative à l'écran d'une calculatrice (pas 1 sur chaque axe).
Jérémy affirme : « f est décroissante sur $\mathbb{R}$. » Qu'en pensez-vous ?

Solution

Jérémy ne voit à l'écran qu'une partie de la courbe et il se trompe.
Avec une table de valeurs sur la calculatrice, par exemple, on constate que $f(12) = 3$ et $f(0) = 0$.
Or $0 \leqslant 12$ et $f(0) \leqslant f(12)$, donc f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$ (car on aurait dû avoir $f(0) \geqslant f(12)$).

Voici la courbe avec une autre fenêtre graphique :



Commentaire
• Pour démontrer qu'une fonction **n'est pas** décroissante sur un intervalle, un contre-exemple suffit (voir l'exercice 37, page 71).

Résolution graphique – Fonctions affines

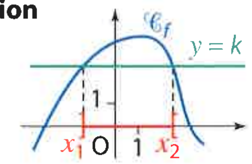
1 Résolution graphique d'inéquations

$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère.

Inéquation $f(x) > k$ (avec k réel)

PROPRIÉTÉ Les solutions de l'inéquation $f(x) > k$ sont **les abscisses** des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ situés **au-dessus** de la droite d'équation $y = k$.

Illustration

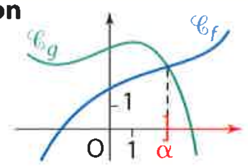


Sur cette figure, l'inéquation $f(x) > k$ a pour solutions les réels de $]x_1 ; x_2[$.

Inéquation $f(x) > g(x)$

PROPRIÉTÉ Les solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$ sont **les abscisses** des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ situés **au-dessus** de la courbe $\mathscr{C}_g$.

Illustration



Sur cette figure, l'inéquation $f(x) > g(x)$ a pour solutions les réels de $]\alpha ; +\infty[$.

2 Sens de variation d'une fonction affine

PROPRIÉTÉ f est la fonction affine $x \mapsto ax + b$ avec $a \neq 0$.

- Si $a > 0$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a < 0$, alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

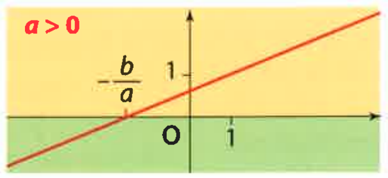
DÉMONSTRATION

u et v désignent deux nombres réels tels que $u \leqslant v$.

- Si $a > 0$, alors $au \leqslant av$ et $au + b \leqslant av + b$ soit $f(u) \leqslant f(v)$.
Donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a < 0$, alors $au \geqslant av$ et $au + b \geqslant av + b$ soit $f(u) \geqslant f(v)$.
Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

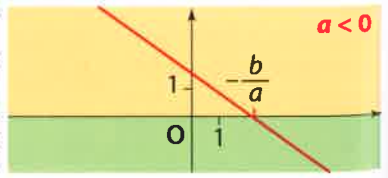
Note
Lorsque $a = 0$, f est une fonction constante ($f(x) = b$).

Cette propriété et le fait que $f(x) = 0$ pour $x = -\dfrac{b}{a}$ permettent de connaître le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.



$ax + b > 0$

$ax + b < 0$



On résume ces résultats dans un tableau de signes.

Note
On peut aussi étudier le signe de $ax + b$ en résolvant l'inéquation $ax + b > 0$.

PROPRIÉTÉ Règle du signe de $ax + b$

$a > 0$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	$-$	0	$+$

$a < 0$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	$+$	0	$-$

Exercice résolu 1 Résoudre graphiquement une inéquation

Voir aussi les exercices 12 et 13, page 67

Animation numérique

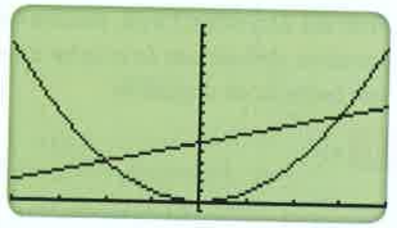
Énoncé

f et g sont les fonctions définies sur l'intervalle $[-4 ; 4]$ par :

$$f(x) = x^2 \quad \text{et} \quad g(x) = x + 6$$

Avec la calculatrice, résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$.

Solution



Voici les courbes représentant f et g à l'écran d'une calculatrice (pas 1 sur chaque axe).

- L'équation $f(x) = g(x)$ a deux solutions (abscisses des points d'intersection des courbes).

Il semble que ces solutions soient -2 et 3.

On le vérifie par le calcul : $f(-2) = g(-2) = 4$ et $f(3) = g(3) = 9$.

- On lit sur le graphique que la courbe de f est au-dessous de la courbe de g sur l'intervalle $[-2 ; 3]$, c'est-à-dire que les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$ sont les réels de l'intervalle $[-2 ; 3]$.

Exercice résolu 2 Étudier le signe de $ax + b$

Voir aussi les exercices 18 et 19, page 67

Énoncé

Un ticket de bus coûte 1,20 €.

On peut aussi prendre un abonnement annuel de 30 € ; le trajet coûte alors 1 €.

a) On note x le nombre de trajets en bus effectués dans l'année.

Donner l'expression de la fonction :

- f qui à x associe le prix total sans abonnement ;
- g qui à x associe le prix total avec abonnement.

b) Donner l'expression réduite de $h(x) = f(x) - g(x)$. Que représente $h(x)$?

c) À partir de combien de trajets effectués dans l'année l'abonnement est-il intéressant ?

Solution

a) $f(x) = 1{,}2x$

$g(x) = 30 + 1x = 30 + x$

b) • $h(x) = 1{,}2x - (30 + x)$

$= 1{,}2x - 30 - x$

$= 0{,}2x - 30$

- $h(x)$ représente l'« économie » éventuellement réalisée avec l'abonnement.

c) L'abonnement est intéressant lorsque $h(x) \geqslant 0$, c'est-à-dire successivement :

$$0{,}2x - 30 \geqslant 0$$
$$0{,}2x \geqslant 30$$
$$x \geqslant \frac{30}{0{,}2}$$
$$x \geqslant 150$$

L'abonnement devient intéressant à partir du 150e trajet.

Commentaires

- Lorsqu'on soustrait une somme (ou une différence), il faut penser à l'écrire entre parenthèses.
- Après avoir résolu l'équation $0{,}2x - 30 = 0$, on aurait pu dresser le tableau de signes de la fonction affine h avec $a > 0$ (ici $a = 0{,}2$) :

x	$-\infty$	150	$+\infty$
$h(x)$	$-$	0	$+$

On retrouve $h(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant 150$.

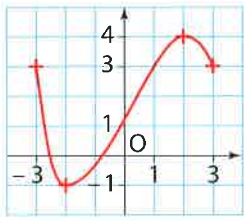
Exercices de base

Pour créer des automatismes

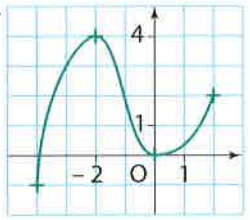
Sens de variation et extremums

Pour les exercices 1 et 2, décrire les variations de la fonction définie par la courbe donnée, puis dresser son tableau de variation.

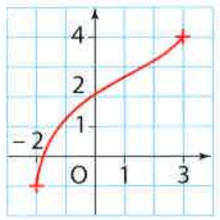
1 a)



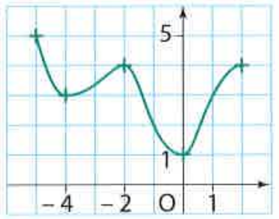
b)



2 a)



b)



3 Voici le tableau de variation d'une fonction f.

x	-2		0		$0,5$		3		$+\infty$
$f(x)$	-1	↘	-2	↗	0	↗	2	↘	

1. a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
b) Donner $f(0)$, $f(-2)$, $f(0,5)$.
2. La fonction f est-elle :
a) croissante sur $[-2;2]$? sur $[0;1]$?
b) décroissante sur $[3;10]$? sur $[-2;1]$?
3. Tracer une courbe $\mathscr{C}$ susceptible de représenter la fonction f dans un repère.

Conseil : *se reporter à l'exercice résolu 1, page 63.*

4 Voici le tableau de variation d'une fonction h.

x	-2		0		3		4
$h(x)$	-1	↗	$\frac{5}{2}$	↘	1	↗	6

Comparer les nombres suivants :

a) $h(-2)$ et $h(-1)$ **b)** $h\left(\frac{1}{3}\right)$ et $h\left(\frac{3}{2}\right)$

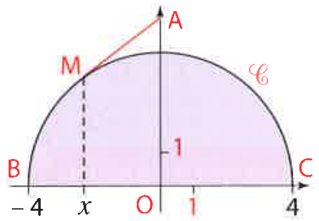
c) $h(3,6)$ et $h(3,7)$ **d)** $h\left(\frac{7}{2}\right)$ et $h(4)$

5 f est la fonction définie sur l'intervalle $[-6;6]$ dont voici le tableau de variation.

x	-6		-4		-3		0		3		4		6
$f(x)$	-2	↗	2	↘	1	↗	4	↘	1	↗	2	↘	-1

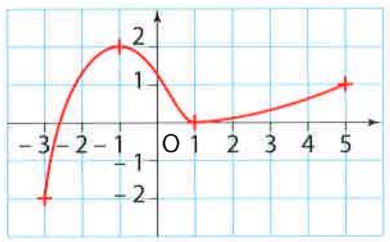
a) Décrire le sens de variation de f.
b) Comparer lorsque cela est possible :
• $f(-3,9)$ et $f(-3)$ • $f(1)$ et $f(3,5)$
c) Tracer une courbe susceptible de représenter f dans un repère.

6 Dans un repère d'origine O, $\mathscr{C}$ est le demi-cercle ci-contre de centre O et de rayon 4.
A est le point de coordonnées $(0;5)$.



Pour tout réel x de $[-4;4]$, on pose $f(x) = \mathrm{AM}$ où M est le point d'abscisse x de $\mathscr{C}$.
En observant la figure, donner le tableau de variation de f.

7 La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3;5]$.



Lire sur la courbe :
1. le maximum de f sur chacun des intervalles :
a) $[-3;5]$ **b)** $[-2;3]$ **c)** $[1;5]$
2. le minimum de f sur chacun des intervalles :
a) $[-3;5]$ **b)** $[-1;4]$ **c)** $[0;5]$

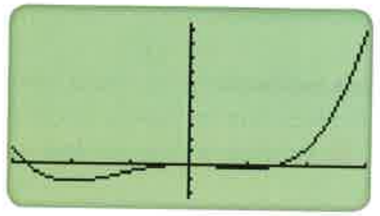
8 Voici le tableau de variation d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3;7]$.

x	-3		-2		1		4		7
$f(x)$	3	↘	-1	↗	1	↘	0	↗	$\frac{1}{2}$

Sur chaque intervalle, donner le maximum et le minimum de f et préciser pour quelles valeurs de x ils sont atteints.
a) $[-3;7]$ **b)** $[-2;4]$ **c)** $[-2;7]$

9 Voici la courbe obtenue à l'écran d'une calculatrice pour la fonction f définie sur $[-3;3]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$$



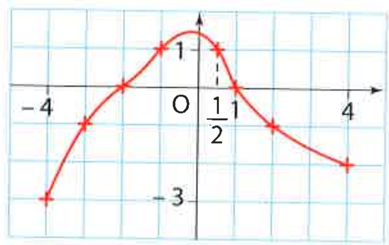
Jemma affirme : « f est décroissante sur $[-3;-2]$ et croissante sur $[-2;3]$. » Qu'en pensez-vous ?

Conseil : *se reporter à l'exercice résolu 2, page 63.*

Résolution graphique d'inéquations

10 f est la fonction définie sur $[-2;6]$ par :
$$f(x) = x^2 - 4x$$
a) Tracer la courbe de f à l'écran d'une calculatrice.
b) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$. Vérifier la validité des réponses par le calcul.
c) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 0$.

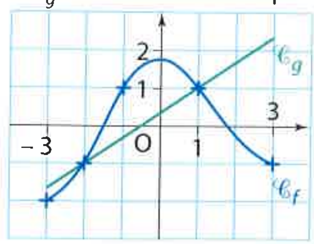
11 f est la fonction définie sur $[-4;4]$ par la courbe ci-contre.
Résoudre graphiquement les inéquations :



a) $f(x) \geqslant 1$ **b)** $f(x) > 0$ **c)** $f(x) \leqslant -1$ **d)** $f(x) > -3$

Conseil : *se reporter à l'exercice résolu 1, page 65.*

12 Dans un repère, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les courbes représentatives de fonctions f et g définies sur $[-3;3]$.
Résoudre graphiquement les inéquations :



a) $f(x) \geqslant g(x)$
b) $f(x) > g(x)$
c) $f(x) \leqslant g(x)$

13 f et g sont les fonctions définies sur $[-4;4]$ par :
$f(x) = (2-x)(x^2+x-7)$ et $g(x) = 4 - x^2$
a) Tracer les courbes représentant f et g à l'écran d'une calculatrice.
b) L'équation $f(x) = g(x)$ admet trois solutions. Les lire graphiquement et vérifier leur validité par le calcul.
c) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$.

Fonctions affines

14 Indiquer le sens de variation de chacune des fonctions affines définies ci-dessous.

a) $f(x) = 7 - x$ **b)** $f(x) = \frac{-2x+3}{5}$

c) $f(x) = \left(\sqrt{2}-1\right)x$ **d)** $f(x) = -\frac{1}{3}(2-x)$

e) $f(x) = \sqrt{3}(x-1)$ **f)** $f(x) = -\frac{x}{1-\sqrt{2}}$

15 f est la fonction affine définie par :
$$f(x) = -3x + 15$$
a) Dans un repère, représenter graphiquement f.
b) Résoudre par le calcul, l'équation $f(x) = 0$.
c) Graphiquement, lire les solutions de l'inéquation $f(x) > 0$.

16 g est la fonction affine définie par :
$$g(x) = -2,5 + 0,5x$$
a) Dans un repère, représenter graphiquement g.
b) Résoudre par le calcul, l'équation $g(x) = 15$.
c) En déduire sans nouveau calcul, la résolution de l'inéquation $g(x) > 15$.

17 Donner le tableau de signes de chaque expression.
a) $5x - 3$ **b)** $-0,5x + 2$ **c)** $-2x - 5$ **d)** $3x + 9$

18 Sur un site internet, on peut faire tirer des photographies numériques.
Si on paie une adhésion de 10 €, les photographies reviennent à 0,07 € l'unité, sinon cela coûte 0,10 € l'unité.
On note x le nombre de photographies à tirer.
a) Déterminer la fonction f qui à x associe le coût total sans adhésion.
b) Déterminer la fonction g qui à x associe le coût total avec adhésion.
c) Que représente la fonction h définie par :
$$h(x) = f(x) - g(x)\ ?$$
d) Déterminer à partir de combien de photographies il est intéressant de payer l'adhésion.

Conseil : *se reporter à l'exercice résolu 2, page 65.*

19 Une entreprise de confection propose à ses couturières deux types de contrats.
• Contrat A : salaire mensuel fixe de 320 € auquel s'ajoutent 26 € par vêtement réalisé.
• Contrat B : salaire mensuel fixe de 686 € et 8 € par vêtement réalisé.
Déterminer, suivant le nombre de vêtements réalisés, le contrat le plus avantageux pour la couturière.

Exercices d'entraînement

Pour développer des compétences

Travaux pratiques

Compléments numériques

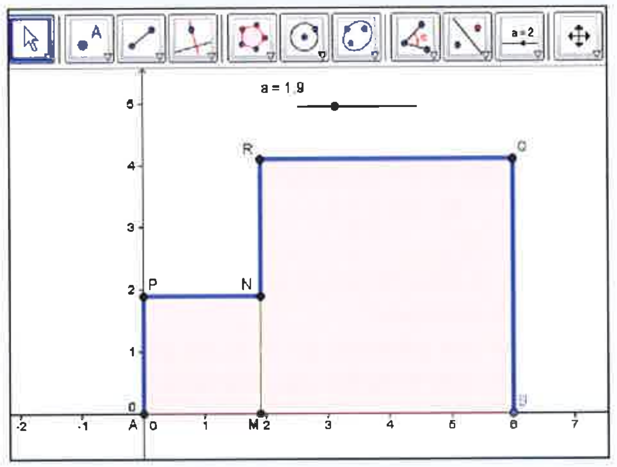
20 B2i L1-1 L2-4 Longueur d'une ligne polygonale

OBJECTIF Développer une démarche expérimentale.

A et B sont deux points tels que AB = 6.
M est un point du segment [AB] tel que AM = x avec $0 \leqslant x \leqslant 6$.
On construit du même côté de la droite (AB) les carrés AMNP et MBQR.
On se propose d'étudier les variations de la longueur L de la ligne polygonale APNRQB.

1. Conjecture

a) Réaliser cette figure avec un logiciel de géométrie dynamique.



b) Afficher la longueur L et créer le point X de coordonnées $(x\,;\mathrm{L})$.
c) Activer la trace du point X et piloter le point M sur le segment [AB].
d) Conjecturer le sens de variation de la fonction $x \mapsto \mathrm{L}$.

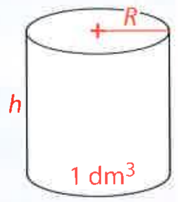
2. Preuve

On note f la fonction qui à tout réel x de $[0\,;6]$ fait correspondre la longueur L.
a) Exprimer $f(x)$ en fonction de x en distinguant les cas $0 \leqslant x \leqslant 3$ et $3 \leqslant x \leqslant 6$.
b) Étudier le sens de variation de la fonction f.
c) Dans un repère, tracer la courbe représentative de la fonction f.

21 Surface minimale

OBJECTIF Modéliser et s'engager dans une activité de recherche.

On se propose de réaliser une boîte cylindrique en carton, avec un couvercle, de contenance 1 dm³, en utilisant le moins de carton possible.



1. Modélisation

On note h la hauteur en dm de la boîte et R le rayon en dm de la base.
a) On sait que V = 1 dm³.
Exprimer alors h en fonction de R.
b) Exprimer l'aire **totale** S, en dm², du cylindre en fonction de R et de h.
c) Vérifier que $\mathrm{S} = 2\pi\mathrm{R}^2 + \dfrac{2}{\mathrm{R}}$.

Rappel
L'aire latérale du cylindre est : $\mathcal{A} = 2\pi\mathrm{R}h$

2. Expérimentation

On note f la fonction $\mathrm{R} \mapsto \mathrm{S}$.
a) Expliquer pourquoi f est définie sur $]0\,;+\infty[$.
b) Tracer la courbe représentant f sur l'intervalle $]0\,;4]$ à l'écran de la calculatrice en indiquant la fenêtre graphique choisie.
c) Avec le menu G-Solv ou CALC de la calculatrice, déterminer la valeur approchée par défaut au dixième près du rayon qui rend l'aire totale minimale. Quelle est cette aire ? Quelle est la hauteur correspondante ?
Remarque : en classe de Seconde, on admet que le minimum de f trouvé sur $]0\,;4]$ est aussi le minimum de f sur $]0\,;+\infty[$.

3. Compléments

Déterminer les dimensions d'une boîte en carton de contenance 1 dm³ utilisant le moins de carton possible lorsque :
a) la boîte est cylindrique sans couvercle ;
b) la boîte, avec un couvercle, a la forme d'un parallélépipède rectangle à base carrée ;
c) la boîte, avec un couvercle, a la forme d'un prisme droit de base un hexagone régulier.

Restitution organisée de connaissances

22 **1.** f est la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 3x - 4$$
u et v désignent deux nombres réels tels que $u \leqslant v$.
a) Recopier et compléter en indiquant la propriété utilisée.
- $3u \ldots 3v$ car ...
- $3u - 4 \ldots 3v - 4$ car ...

b) Que vient-on de démontrer pour la fonction f ?
2. De façon analogue, étudier les variations de la fonction affine g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2x + 5$.

Raisonner, démontrer

23 Un petit plaisantin a effacé les tarifs d'une bibliothèque.

... euros pour l'inscription

... euros par livre emprunté

Parmi ces deux tableaux, lequel permet de retrouver les tarifs effacés ? Quels sont ces tarifs ?

(1)

Nombre de livres empruntés	2	4	6	8
Coût en euros	20	21	23	24

(2)

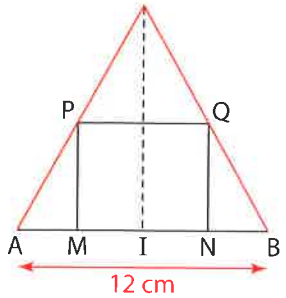
Nombre de livres empruntés	2	4	6	8
Coût en euros	42	44	46	48

D'après EVAPM

24 Pour aller en train de Paris à Grenoble, un voyageur prend un TGV, puis un TER.
Le TGV met 2 h pour parcourir les 400 km entre Paris et Lyon, puis le TER met 1 h 30 pour les 100 km entre Lyon et Grenoble.
On néglige les temps d'arrêt (on considère que chaque train roule à une vitesse constante) et de changement de train.

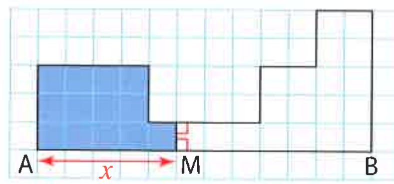
a) Représenter graphiquement à quelle distance le voyageur se trouve de Lyon en fonction du temps.
b) Pendant combien de temps le voyageur sera-t-il à moins de 50 km de Lyon ?

25 ABC est un triangle équilatéral de côté 12 cm et I est le milieu du segment [AB].
M est un point variable du segment [AI] et N le point du segment [AB] distinct de M tel que AM = NB.
Q est le point du segment [BC] et P est le point du segment [AC] tels que MNQP soit un rectangle.



On note f la fonction qui à x = AM (en cm) associe l'aire, en cm², du rectangle MNQP.
a) Quel est l'ensemble de définition de f ?
b) Exprimer MN, puis MP en fonction de x.
En déduire l'expression algébrique de $f(x)$.
c) Calculer $f(3)$, puis vérifier que pour tout x de $[0\,;6[$:
$$f(x) - f(3) = -2\sqrt{3}\,(x-3)^2$$
d) En déduire que $f(3)$ est le maximum de f sur $[0\,;6[$.
e) Quelles sont les dimensions du rectangle d'aire maximale ?

26 Sur la figure suivante, AB = 12 et M est un point qui décrit le segment [AB]. On note x la distance AM et $f(x)$ l'aire du domaine coloré en bleu.



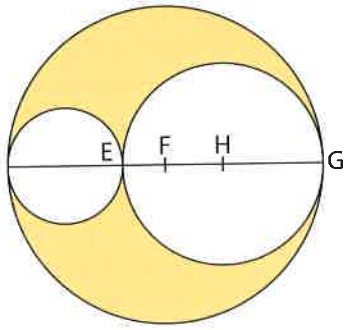
1. Calculer $f(x)$ pour x appartenant à chacun des intervalles suivants :
a) $[0\,;4]$ **b)** $[4\,;8]$ **c)** $[8\,;10]$ **d)** $[10\,;12]$

Algorithmique

2. a) Écrire en langage naturel un algorithme de tracé de la courbe représentant f dans un repère.
b) Tracer cette courbe.

Info
La fonction f ci-dessus est appelée une fonction affine par morceaux.
On peut la tracer à l'écran de la calculatrice avec une instruction (à compléter) telle que :
Y1 = (3X) * (0 ⩽ X and X ⩽ 4) + (X + 8) * (...

27 Dans un grand cercle de diamètre 10 cm, on trace deux cercles tangents ; on note x le diamètre, en cm, de l'un des deux cercles.



f est la fonction qui à x associe l'aire, en cm², du domaine blanc.

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Donner l'expression algébrique de $f(x)$.

c) Tracer la courbe représentant f à l'écran d'une calculatrice en précisant la fenêtre graphique choisie.

d) Conjecturer l'existence d'un minimum pour la fonction f et la valeur de x pour laquelle il est atteint.

e) Vérifier que $f(x) - f(5) = \frac{\pi}{2}(x-5)^2$.

En déduire le minimum de f et faire la figure dans ce cas.

28 Voici le tableau de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x$.

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	m	↗

1. Calculer m, $f(-1)$ et $f(4)$.

2. a désigne un nombre réel de l'intervalle $\left[\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$. Comparer $f(a)$ et $f(a+1)$.

3. Donner le meilleur encadrement possible de $f(x)$ dans chacun des cas suivants :

a) $x \in \left[-1\,;\frac{3}{2}\right]$ **b)** $x \in [-1\,;4]$

29 f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. f est croissante sur $\mathbb{R}$ et g est décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus $f(1) = g(1)$.

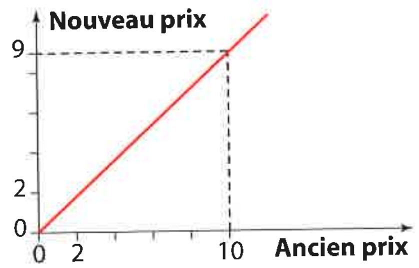
a) Démontrer que pour tout $x \geqslant 1$, $f(x) \geqslant g(x)$.

b) Comparer $f(x)$ et $g(x)$ sur $]-\infty\,;1]$.

Analyse critique d'un document

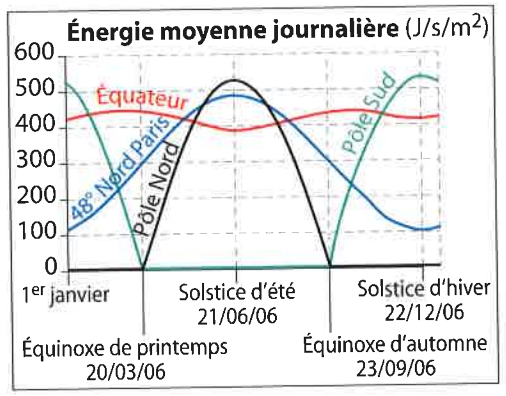
30 Travailler en groupe Après avoir changé d'enseigne, les prix ont changé dans un hypermarché.

Voici la courbe des nouveaux prix en fonction des anciens prix (en euros).



Voyant ce graphique, Pierre en conclut que les prix ont augmenté.
Qu'en pensez-vous ? Justifier la réponse.

31 Ce graphique représente l'énergie solaire journalière moyenne reçue hors de l'atmosphère en fonction du jour de l'année.



Avec la précision permise par une lecture graphique, déterminer :

a) quand l'énergie solaire journalière moyenne reçue au pôle Sud est la même que celle reçue à Paris ;

b) quand l'énergie solaire journalière moyenne reçue au pôle Nord est supérieure à celle reçue à Paris ;

c) quand l'énergie solaire journalière moyenne reçue au pôle Sud est supérieure à celle reçue sur l'équateur.

Les quatre saisons.

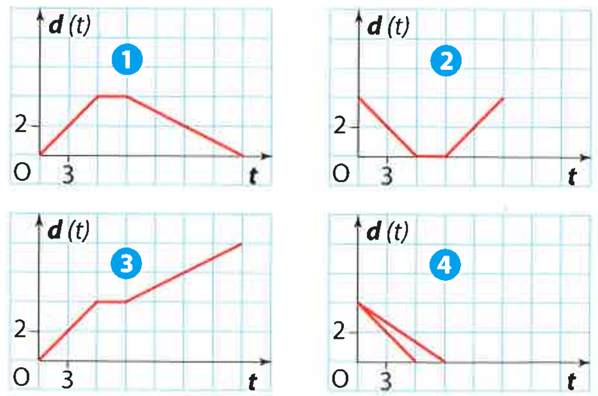
Communiquer à l'écrit ou à l'oral

32 f est une fonction définie sur l'intervalle $I = [0\,;10]$ et $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère. Recopier et compléter les cases vides.

Langage des fonctions	Langage algébrique	Langage lié au graphique
Déterminer l'image de 3 par f	Calculer $f(3)$	Donner l'ordonnée du point de $\mathscr{C}$ dont l'abscisse est 3
	Résoudre dans I l'équation $f(x) = k$	
f est croissante sur I		
	Résoudre dans I l'inéquation $f(x) > m$	

33 Travailler en groupe Un cycliste descend une côte de 4 km en 6 minutes, s'arrête 3 minutes et remonte la même côte en 12 minutes. d est la fonction qui, à un instant t (en min), associe la distance $d(t)$ (en km) parcourue par ce cycliste.

1. Lequel de ces graphiques est susceptible de représenter la fonction d ?

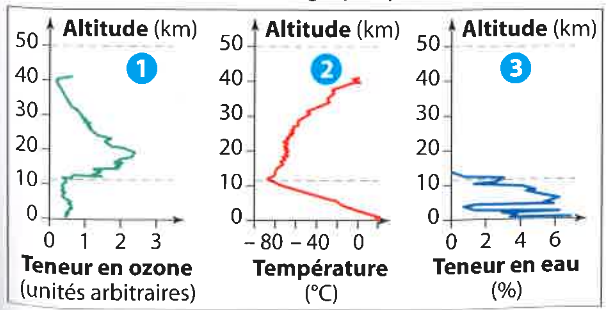


2. Donner l'expression de $d(t)$ en fonction de t lorsque :

a) $t \in [0\,;6]$ **b)** $t \in [6\,;9]$ **c)** $t \in [9\,;21]$

34 **a)** Pour chacun des graphiques ci-dessous, préciser ce qui est représenté, et en fonction de quoi.

b) Commenter chacun des graphiques.



S'initier à la logique

35 **Quantificateurs universel, existentiel**

f est une fonction définie sur l'intervalle $[-4\,;4]$ dont voici le tableau de variation.

x	-4	-1	4
$f(x)$	-5 ↗	2	↘ -2

En exploitant les informations données, justifier, pour chacune des propositions, si elle est vraie ou fausse.

a) Il existe un nombre réel de l'intervalle $[-4\,;4]$ qui a une image strictement négative par f.

b) Tous les nombres réels de l'intervalle $[-4\,;4]$ ont une image négative par f.

c) Tous les nombres réels de l'intervalle $[-4\,;4]$ ont une image strictement inférieure à 3 par f.

d) Il existe un nombre réel de l'intervalle $[-4\,;4]$ qui a une image supérieure à 3 par f.

36 **Négation, et, ou, si… alors…**

Logique

A et B désignent des phrases.
- La négation de la phrase « A **ou** B » est « non A **et** non B ».
- La négation de la phrase « A **et** B » est « non A **ou** non B ».
- La négation de la phrase « si A, alors B » est « A et non B ».

Par exemple, la négation de « $x < 3$ ou $x > 7$ » est « $x \geqslant 3$ et $x \leqslant 7$ » c'est-à-dire « $3 \leqslant x \leqslant 7$ ».

Écrire la négation de chaque phrase.

a) Tout entier naturel est pair ou impair.

b) Si ABCD est un losange, alors ABCD est un parallélogramme.

c) Si $x^2 = 1$, alors $x = 1$ ou $x = -1$.

d) (AB) ⊥ (CD) et AB = CD.

37 **Fonctions non croissantes, non décroissantes**

1. f est une fonction croissante sur un intervalle I signifie : « pour tous réels u et v de I, si $u \leqslant v$ alors $f(u) \leqslant f(v)$ ».

a) Écrire la définition d'une fonction non croissante sur I.

b) Une fonction non croissante sur I est-elle une fonction décroissante sur I ? Illustrer son propos avec un graphique.

2. f est la fonction définie sur $[0\,;3]$ par $f(x) = x^2 - 2x + 4$.
Pierre a écrit : « $f(0) = 4$ et $f(1) = 1 - 2 + 4 = 3$.
$0 \leqslant 1$ et $f(0) \geqslant f(1)$ donc f est décroissante sur $[0\,;3]$. »

a) Expliquer pourquoi ce raisonnement est faux.

b) Faire une conclusion correcte à partir des calculs de Pierre, commençant par « $0 \leqslant 1$ et $f(0) \geqslant f(1)$ donc… ».

QCM

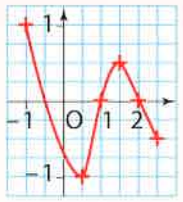
38 Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Laquelle ?

1 Voici le tableau de variation d'une fonction f. Alors :

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↘

a) $f(0) = 0$ **b)** $f(3) < f(5)$ **c)** $f(5) \leqslant 0$

2 f est la fonction définie par le graphique ci-contre.



a) f est décroissante sur $\left[-1\,;\,\frac{1}{2}\right]$ **b)** f est croissante sur $\left[0\,;\,\frac{3}{2}\right]$ **c)** f est décroissante sur $[1\,;2]$

3 f est la fonction définie par le graphique ci-contre.
Le maximum de f sur $[0\,;2]$ est : **a)** 1 **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** -1

39 Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Laquelle ? Justifier.

1 f est une fonction telle que $f(-1) = 0$, $f(1) = -3$, $f(4) = 5$.
De plus, f est décroissante sur $[-1\,;1]$ et croissante sur $[1\,;4]$.
Alors, pour tout réel x de $[-1\,;4]$: **a)** $f(x) \geqslant -3$ **b)** $f(x) > -3$ **c)** $f(x) < 0$.

2 Le tableau de signes de $10 - 5x$ est :

a)

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$10-5x$	$-$	0	$+$

b)

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$10-5x$	$+$	0	$-$

c)

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$10-5x$	$+$	0	$-$

3 f est une fonction affine décroissante sur $\mathbb{R}$ et la droite qui la représente dans un repère coupe l'axe des abscisses au point A $(5\,;0)$. Une expression possible de $f(x)$ est :
a) $f(x) = -2x + 10$ **b)** $f(x) = 2x - 10$ **c)** $f(x) = -5x + 1$

Exercices interactifs

Vrai-Faux

40 Dire pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse.

a) f est une fonction définie sur $[0\,;1]$ et $f(0) > f(1)$. Alors f est croissante sur $[0\,;1]$.

b) Une fonction qui n'est pas croissante sur un intervalle I est décroissante sur I.

c) Une fonction croissante sur $[0\,;2]$ ne peut pas prendre des valeurs négatives.

d) Ce tableau de variation est convenable.

x	0		1		2		5
$f(x)$	-1	↘	1	↗	0,5	↘	-2

41 Dire pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse. Justifier.

a) D'après ce tableau de variation, pour tout réel u de $[-2\,;0]$ et tout réel v de $[0\,;3]$, $f(u) \leqslant f(v)$.

x	-2		0		3
$f(x)$	-2	↗	2	↘	0

b) f est la fonction dont le tableau de variation est donné ci-dessus. Pour tout x de $[-2\,;3]$, $f(x) \leqslant 3$.

c) f est la fonction affine $x \mapsto \frac{1}{3}x - 5$.
Quand x augmente de 3, alors $f(x)$ augmente de 1.

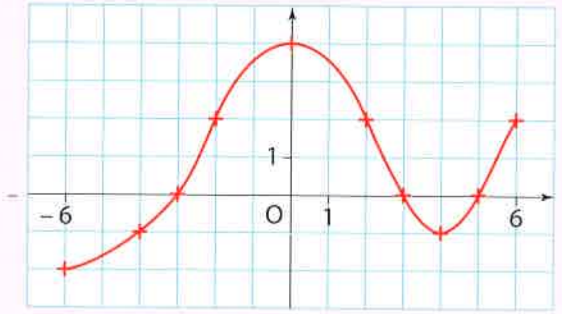
d) f est la fonction affine $x \mapsto 52 - 0{,}05x$.
Pour tout x de l'intervalle $[1\ 000\,;1\ 100]$, $f(x) > 0$.

e) La fonction $x \mapsto 3x^2 + 1$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercices interactifs

Pour réviser

42 **Lire un graphique**
f est la fonction définie sur l'intervalle $[-6\,;6]$ par le graphique suivant :



a) Quel est le minimum de f sur $[-3\,;6]$?
b) Quel est le maximum de f sur $[-6\,;6]$?
c) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$.
d) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 2$.
e) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant -1$.
f) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant 2$.

Conseils
a) b) Revoir le cours, § 1, page 62.
c) d) Revoir l'exercice résolu 2, page 43.
e) Revoir l'exercice 11, page 67, corrigé en fin de manuel.

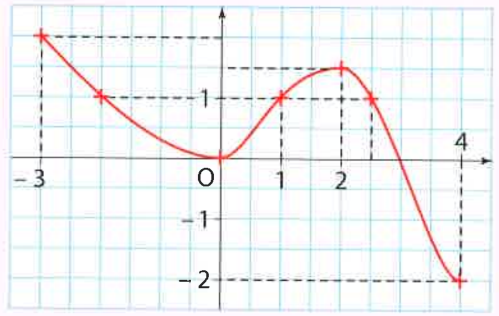
43 **Lire un tableau de variation**
Voici le tableau de variation d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-8\,;8]$.

x	-8		-2		1		8
$f(x)$	0	↗	4	↘	-3	↗	1

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse ou si l'on ne peut pas décider.
Dans ce dernier cas, expliquer pourquoi.
a) La fonction f est croissante sur $[-8\,;8]$.
b) La fonction f est décroissante sur $[-8\,;1]$.
c) La fonction f est décroissante sur $[0\,;1]$.
d) La fonction f est croissante sur $[-8\,;-1]$.
e) $f(-4) \leqslant 4$ **f)** $f(-7) = 1$ **g)** $f(1) = -3$
h) $f(0) = 5$ **i)** $f(-7) \leqslant f(-3)$ **j)** $f(-1) \leqslant f(0)$
k) $f(3) \leqslant f(7)$ **l)** $f(-5) \leqslant f(0)$ **m)** $f(-3) = f(-1)$

Conseils
• Faire attention aux intervalles considérés, au sens de variation de la fonction, aux extremums et aux valeurs que peut prendre $f(x)$ sur ces intervalles.

44 **Encadrer $f(x)$**
f est la fonction définie sur l'intervalle $[-3\,;4]$ par le graphique suivant :



1. a) Quel est le sens de variation de f sur $[-3\,;0]$?
b) En déduire le meilleur encadrement possible de $f(x)$ sur $[-3\,;0]$.
2. a) Quel est le sens de variation de f sur $[0\,;2]$?
b) En déduire le meilleur encadrement possible de $f(x)$ sur $[0\,;2]$.
3. a) Quel est le sens de variation de f sur $[2\,;4]$?
b) On sait que x est un réel de $[2\,;4]$ et que $-2 \leqslant f(x) \leqslant 1$.
Donner le meilleur encadrement possible de x.
4. Sachant que $-3 \leqslant x \leqslant 2$, donner le meilleur encadrement possible de $f(x)$.

Conseils
1. b) Déterminer le maximum et le minimum de f sur $[-3\,;0]$. Utiliser la même méthode pour les questions **2. b)** et **4.**
3. b) Lire les antécédents de 1 et -2 dans $[2\,;4]$.

45 **Traduire une situation**
Une entreprise de menuiserie fabrique 150 chaises par jour. Elle produit deux sortes de chaises, les unes vendues 38 € pièce, les autres 60 € pièce.
L'entreprise souhaite que le montant des ventes soit strictement supérieur à 7 320 € par jour et elle veut fabriquer plus de chaises à 38 € que de chaises à 60 €.
On note x le nombre de chaises à 38 € fabriquées et f la fonction qui à x associe le montant journalier des ventes.
a) Expliquer pourquoi $f(x) = 9\ 000 - 22x$.
b) Résoudre l'inéquation $f(x) > 7\ 320$.
c) Combien de chaises à 38 € doit fabriquer l'entreprise ?

Conseils
• Revoir l'exercice résolu 2, page 65.

Vérifier les réponses p. 300

Exercices d'approfondissement

Pour aller plus loin

46 Avec un guide (1)

f est la fonction définie sur $[-3\,;3]$ par :

$$f(x)=x^2+1.$$

a) Calculer $f(-2)$ et $f(1)$. Pourquoi peut-on affirmer que f n'est pas croissante sur $[-3\,;3]$?

b) Montrer que le minimum de la fonction est atteint pour $x_0=0$.

c) Montrer que le maximum de f est 10. Pour quelle(s) valeur(s) est-il atteint ?

d) Contrôler les résultats en programmant la fonction sur votre calculatrice.

Guide de résolution

a) Pour prouver qu'une propriété est fausse, il suffit d'avoir un contre-exemple : si f était croissante sur $[-3\,;3]$, dans quel ordre seraient rangés $f(-2)$ et $f(1)$?

b) Calculer $f(0)$ et montrer que $f(x)-f(0)$ est positif pour tout x de $[-3\,;3]$.

47 Avec un guide (2)

f est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=x^2+x.$$

On se propose d'étudier les variations de f.

1. Conjecture

a) Utiliser la calculatrice graphique pour conjecturer le sens de variation de f.

b) Pourquoi l'observation de l'écran de la calculatrice ne suffit pas pour être certain du sens de variation sur $[0\,;+\infty[$?

2. Preuve

u et v désignent deux réels de $[0\,;+\infty[$.

a) Quel est le signe de chacun des réels u et v ?

b) Vérifier que $f(u)-f(v)=(u-v)(u+v+1)$.

c) Déduire de **a)**, le signe de $u+v+1$.

d) On suppose que $u\leqslant v$. Que peut-on dire alors du signe de $f(u)-f(v)$?

e) Conclure pour le sens de variation de f.

Guide de résolution

2. a) Pour comparer les réels $f(u)$ et $f(v)$, on étudie le signe de leur différence $f(u)-f(v)$. Penser ici aux parenthèses :

$$f(u)-f(v)=u^2+u-(v^2+v)$$

Utiliser ensuite une factorisation de u^2-v^2, puis un facteur commun apparaît.

48 En économie

L'entreprise des volcans fabrique des pâtes de fruits. Les frais fixes (c'est-à-dire qui ne dépendent pas de la quantité produite) s'élèvent à 2 000 euros par semaine, auxquels il faut ajouter des frais variables de 4 euros par kilogramme produit.

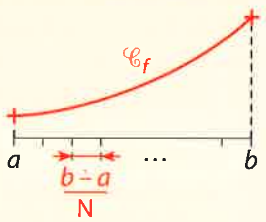
a) Dire intuitivement quel est le sens de variation du coût total de fabrication en fonction du nombre de kilogrammes produits.

b) De même, dire intuitivement quel est le sens de variation du prix de revient moyen d'un kilogramme de pâtes de fruits produit en fonction du nombre de kilogrammes produits.

c) Démontrer ou infirmer vos conjectures. On notera x le nombre de kilogrammes de pâtes de fruits, C la fonction coût total de fabrication et P la fonction prix de revient moyen d'un kilogramme produit.

Algorithmique

49 Un algorithme pour tester la monotonie



f est une fonction définie sur $[a\,;b]$ avec $f(a)\neq f(b)$. On découpe l'intervalle $[a\,;b]$ en N intervalles de même longueur $\dfrac{b-a}{\text{N}}$ et on considère l'algorithme suivant :

```
Entrées
a, b : les bornes de l'intervalle
f : la fonction étudiée
N : le nombre d'intervalles
Initialisations
pas prend la valeur (b – a)/N
d prend la valeur f(b) – f(a)
x prend la valeur a
Traitement
Pour k de 1 jusqu'à N
  | Si f(x + pas) – f(x) et d pas de même signe alors
  |   | Sortie
  |   | Afficher "La fonction n'est pas monotone"
  |   | Fin du programme
  | FinSi
  | x prend la valeur x + pas
FinPour
Sortie
Afficher "La fonction semble monotone"
```

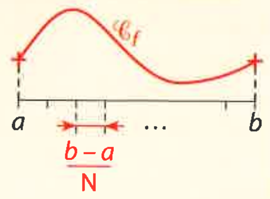
a) Expliquer le fonctionnement de cet algorithme.

b) Pourquoi, à la sortie de la boucle, affiche-t-on : « La fonction **semble** monotone » ?

c) Traduire cet algorithme par un programme et tester ce programme.

Algorithmique

50 Un algorithme de recherche d'extremums



f est une fonction définie sur un intervalle $[a\,;b]$. On découpe cet intervalle en N intervalles de même longueur $\dfrac{b-a}{\text{N}}$.

On considère l'algorithme suivant :

```
Entrées
a, b : les bornes de l'intervalle
f : la fonction étudiée
N : le nombre d'intervalles
Initialisations
min prend la valeur f(a)
max prend la valeur f(a)
x prend la valeur a
pas prend la valeur (b – a)/N
Traitement
Pour k de 1 jusqu'à N
  | x prend la valeur x + pas
  | y prend la valeur f(x)
  | Si y > max alors
  |   | max prend la valeur y
  | FinSi
  | Si y < min alors
  |   | min prend la valeur y
  | FinSi
FinPour
Sorties
Afficher min et max
```

a) Faire fonctionner cet algorithme avec une fonction f définie sur $[0\,;1]$ en prenant N = 10 et les valeurs de f suivantes :

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$f(x)$	0,1	0,3	0,9	0,7	0,5	0,3	0,1	– 0,2	– 0,5	0,4	0,6

Afin de suivre l'évolution du contenu des variables lors du déroulement de l'algorithme, compléter le tableau :

k		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	0	0,1									
y		0,3									
max	0,1	0,3									
min	0,1	0,1									

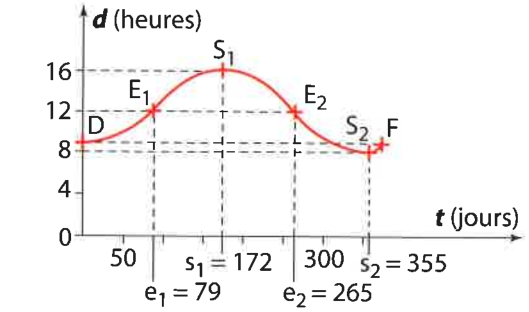
b) Faire également fonctionner l'algorithme avec la fonction g définie sur $[0\,;1]$ par $g(x)=5x^2-2x-1$ en prenant toujours N = 10. Vérifier les résultats obtenus.

c) Traduire cet algorithme par un programme.

d) Remarquer à l'aide d'exemples que les valeurs fournies par le programme ne sont le plus souvent que des valeurs approchées des extremums.

51 En géographie

Le graphique ci-dessous donne la durée du jour en heures dans une ville de France au cours d'une année, t étant exprimé en jours.



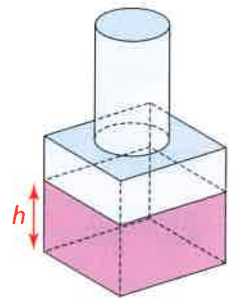
a) Commenter le graphique en ce qui concerne les points notés S_1 et S_2. Comment s'appelle les jours correspondants s_1 et s_2 ?

b) Que peut-on dire des ordonnées de D et F ? Était-ce prévisible ?

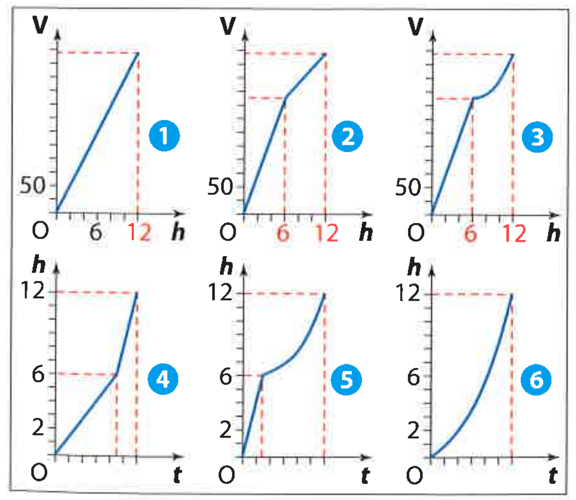
c) Que peut-on dire de la durée du jour pour les valeurs e_1 et e_2 de t ? Comment s'appellent ces jours ?

52 Travailler en groupe — La bouteille

Une bouteille est formée d'un cube d'arête 6 cm et d'un cylindre de hauteur 6 cm et de rayon 2 cm. On note h la hauteur en cm du liquide dans cette bouteille, V le volume d'eau en cm³ dans la bouteille et t la durée écoulée depuis le début du remplissage à débit constant.



Parmi ces graphiques, lesquels peuvent représenter cette situation ?

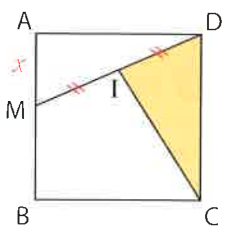


Exercices

Problèmes ouverts

53 **Triangle déformable**

ABCD est un carré de côté 5 cm. M est un point de [AB], on pose x = AM (en cm). I est le milieu de [DM]. On considère la fonction f qui à x associe l'aire en cm² du triangle DCI.

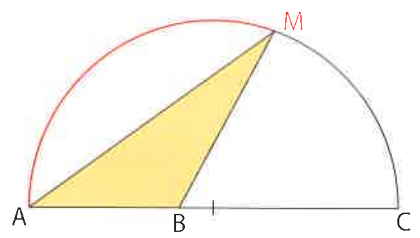


Conjecturer les variations de cette fonction. Admet-elle un maximum, un minimum ? Démontrer les résultats obtenus.

54 **Dans un demi-cercle**

[AC] est un segment de longueur 10 cm et B est le point de [AC] tel que AB = 4 cm. M est un point du demi-cercle de diamètre [AC].

On note x la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AM}$, en cm, et f la fonction qui à x associe l'aire, en cm², du triangle ABM.



Dresser le tableau de variation de la fonction f.

Des défis

55 **La fonction inconnue**

f est une fonction affine telle que :

$$f(1) \leqslant f(2), \quad f(3) \geqslant f(4) \quad \text{et} \quad f(5) = 5.$$

Quelle est cette fonction affine ?

D'après Olympiades de Belgique

56 **L'image de l'image**

Trouver au moins une fonction affine f telle que pour tout réel x :

$$f(f(x)) = 4x - 3.$$

D'après Kangourou des mathématiques junior

57 **Trios de fonctions affines**

« Bonjour. Je suis b, une fonction affine, comme mes deux copines a et c. Nous dépendons de la valeur de la variable x. Enfin, sauf a. Plus x augmente, plus j'augmente, alors que c'est le contraire pour c.

- Quand x vaut 0, il y a un écart de 4 entre la valeur que je prends et celle que prend a.
- J'ai la même valeur que a quand x vaut 4, et c a la même valeur que a quand x vaut 9.
- Si on nous ajoute quand x vaut 0, on obtient un total de 9,5. Il existe une valeur entière de x telle que je vaille 1 de plus que a, et que c vaille 1 de plus que moi.

Qui sommes-nous ? »

Sujets d'exposés

Betty Heidler au lancer du marteau.

Sujet 1

MPS Méthodes et pratiques scientifiques

En athlétisme, on lance le poids, le marteau, le javelot, le disque. Par un mouvement adapté, le lanceur donne une vitesse initiale au projectile qui suit alors une trajectoire.

→ Rechercher sur Internet des informations sur ce type de trajectoire. En particulier, s'informer sur les variations de la portée du lancer en fonction de l'angle de tir.

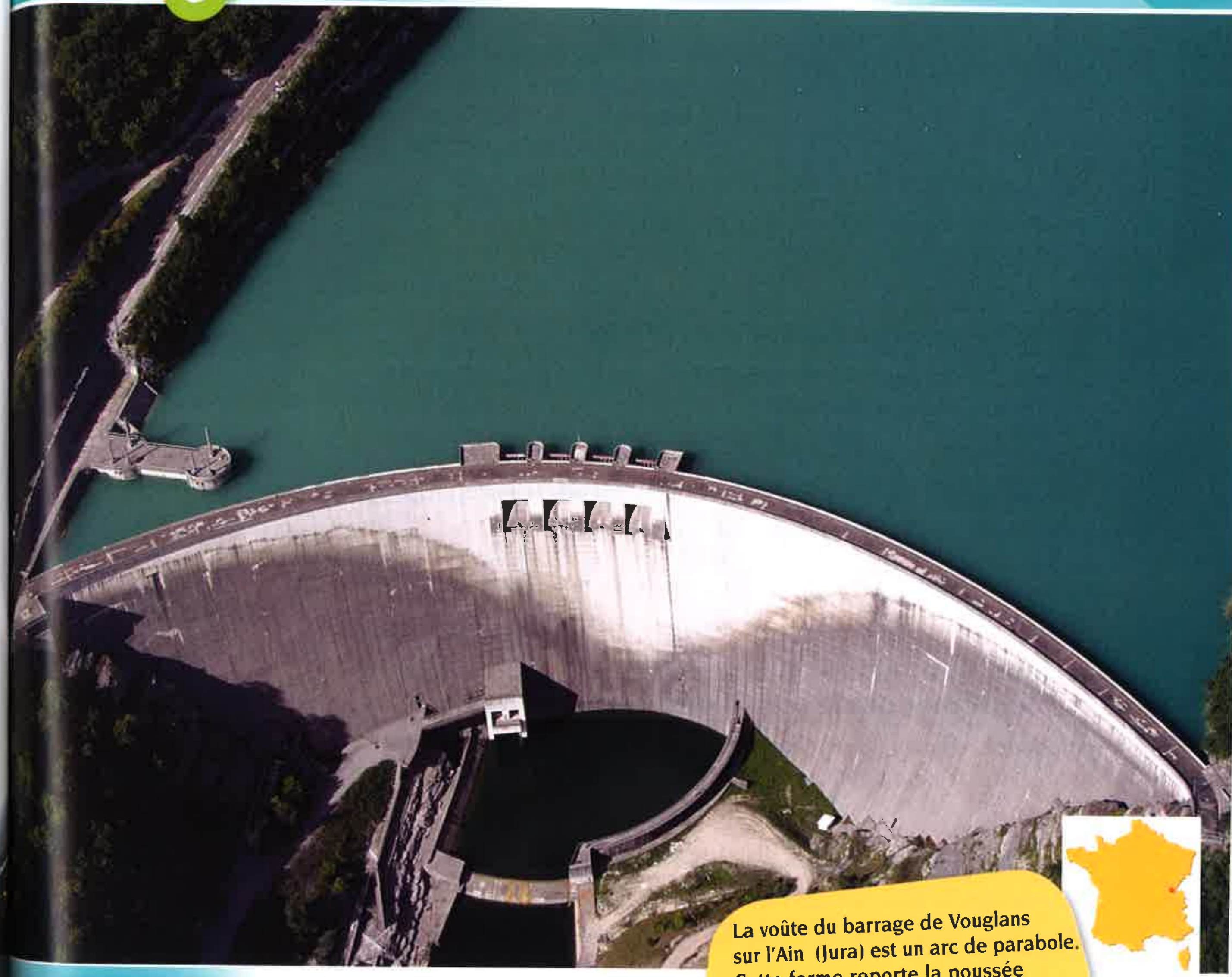
→ Lors d'un exposé, présenter vos résultats à la classe.

Sujet 2

Leonhard Euler (XVIIIe siècle) est l'un des plus grand mathématiciens de tous les temps. En particulier, il introduisit la notation $f(x)$ pour désigner l'image d'un nombre par une fonction.

→ Expliquer l'intérêt de cette notation par rapport à celles utilisées auparavant, et présenter la vie et l'œuvre de cet homme.

Chapitre 4 — Fonctions de référence et problèmes



La voûte du barrage de Vouglans sur l'Ain (Jura) est un arc de parabole. Cette forme reporte la poussée des eaux sur les versants.

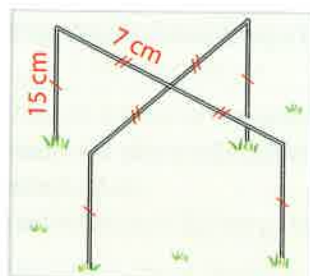
Énigme ★

À chaque résultat, on associe la lettre correspondante dans l'alphabet (1 → A ; 2 → B, 3 → C, …).

$12\times\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{6}\right)-2$ → $2^2+3^2+1^2$ → $2+2\sqrt{100}$ → $\frac{3\times4\times7}{28}+\frac{28}{14}$ → $\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{4}+\frac{1}{10}\right)\times20-7$ → 3^3-2^3 → $3-4+5-6+7$

Quel mot obtient-on ?

Énigme ★★



Lætitia souhaite faire passer une balle de diamètre 10 cm sous deux arceaux perpendiculaires en leur milieu et de largeur 14 cm.

Est-ce possible ?