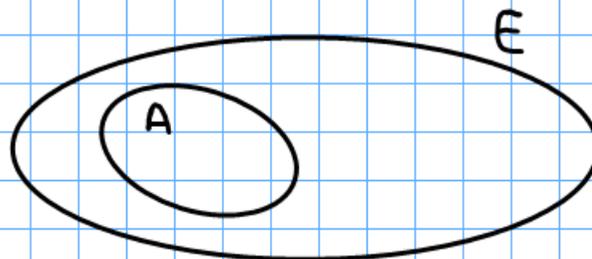


Chapitre 1: Proportions et taux d'évolution.

I Proportions et pourcentages

1) Définitions

Soit A une partie d'un ensemble E .



Si n_E et n_A sont respectivement les nombres d'éléments de E et de A (effectif de E et de A),

la **proportion** des éléments de A dans E (ou par rapport à E)

est le quotient

$$p = \frac{n_A}{n_E}$$

E est la population de référence.

2) Pourcentages

prendre $t\%$ d'une valeur c'est la multiplier par $\frac{t}{100}$

exemple: l'effectif total du lycée Colbert est de 360 élèves
dont 57% d'élèves de seconde. Déterminons le nombre d'élèves
de seconde.

$$\frac{57}{100} \times 360 = 0,57 \times 360 = 205,2 \approx 205 \text{ élèves}$$

\downarrow \downarrow
 57% "de" 360 élèves

remarque: pour écrire un nombre décimal sous la forme d'un
pourcentage, on cherche le numérateur de la fraction dont le
dénominateur est égal à 100.

$0,6527 \times 100$
 \swarrow

exemple: $p = 0,6527 = \frac{65,27}{100} = 65,27\%$

Méthodes

Ⓐ Calculer une proportion:

Dans une classe de 1^{ère} de 35 élèves, 9 élèves font du ski.

Calculer la proportion p d'élèves qui font du ski: donner p sous la forme d'une fraction, puis donner sa valeur décimale arrondie à 10^{-3} près et en déduire l'expression de p sous la forme d'un pourcentage.

réaction:

- la population de référence E est la classe de 1^{ère}; $n_E = 35$
- la sous-population A est formée des élèves pratiquant le ski; $n_A = 9$

• la proportion d'élèves de la classe qui font du ski est

$$p = \frac{n_A}{n_E} = \frac{9}{35} = 0,257 = \frac{25,7}{100} = 25,7\%$$

fraction

forme décimale
à 10^{-3} près

pourcentage.

(B) Calculer l'effectif d'une population

Dans un village 697 habitants vivent de l'agriculture, ce qui représente 82% de la population. Combien y-a-t-il d'habitants dans le village ?

réduction : la population de référence E est formée de la population du village et $n_E = ?$

la sous-population A est formée des habitants vivant de l'agriculture et $n_A = 697$

par définition
$$p = \frac{n_A}{n_E}$$

$\uparrow \frac{82}{100} \leftarrow \frac{697}{n_E}$

par produit en croix, on obtient
$$n_E = \frac{697 \times 100}{82}$$

$$n_E = 850$$

Le village compte 850 habitants

3. Proportions et réunion, interaction

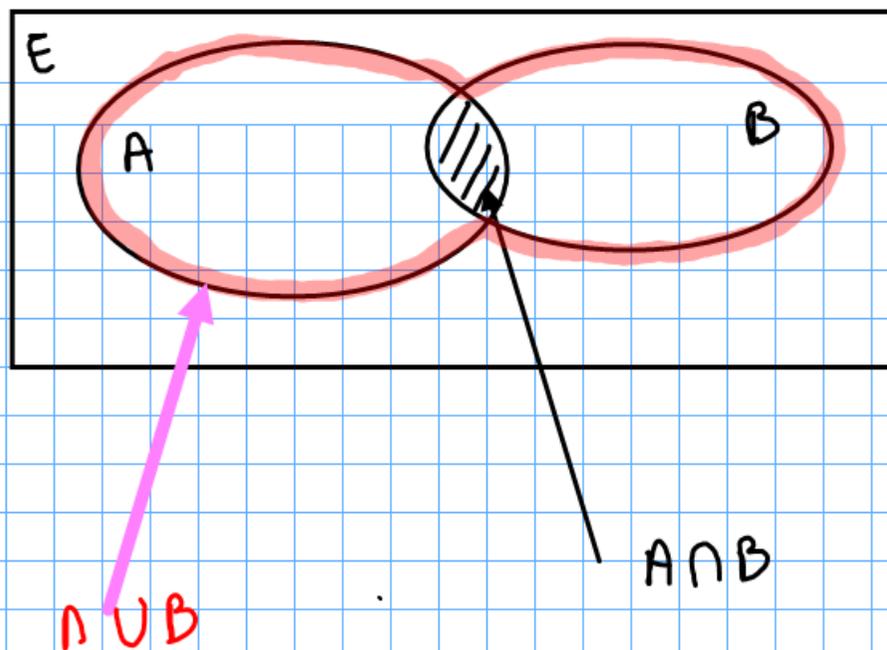
Si A et B sont deux parties (ou sous-populations) d'un même ensemble E (population de référence), d'effectifs respectifs n_A , n_B , et n_E , l'ensemble des éléments qui appartiennent à l'une ou moins des parties A ou B est noté $A \cup B$

l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A ET à B , c'est à dire qui sont communs aux deux parties A et B est noté $A \cap B$.

En mathématiques, la conjonction de coordination **OU** se traduit par \cup (**union**) tandis que **ET** se traduit par \cap (**intersection**)

$A \cup B$ se lit "A union B"

$A \cap B$ se lit "A inter B"



- Exemple:
- * E: classe de 1STMG3 ; $n_E = 22$
 - * A: sous-population constituée des élèves de 1STMG3 qui aiment les maths ; $n_A = 8$
 - * B: sous-population constituée des élèves de 1STMG3 qui aiment le sport ; $n_B = 14$
 - * $A \cap B$: sous-population des élèves de 1STMG3 qui aiment le sport et les maths ; $n_{A \cap B} = 6$
 - * $A \cup B$: sous-population des élèves de 1STMG3 qui aiment au moins une de ces disciplines $n_{A \cup B} = 16$

Propriété :

$$n_{A \cup B} = n_A + n_B - n_{A \cap B}$$

$$P_{A \cup B} = P_A + P_B - P_{A \cap B}$$

II Caux d'évolution ou variation relative

1) Vocabulaire et notations.

On étudie la façon dont une quantité y_1 évolue vers un stade y_2

on note : $y_1 \longrightarrow y_2$

a) variation absolue

on appelle variation absolue la quantité $y_2 - y_1$

- si la variation absolue est positive, cela signifie que $y_2 > y_1$
donc on a affaire à une augmentation ou hausse.

- si la variation absolue est négative, cela traduit le fait que
 $y_2 < y_1$: on a affaire à une baisse ou diminution.

Le signe de la variation absolue est donc très important.

Exemple:

un prix passe de 12 € à 7 €, la variation absolue est de $7 - 12 = -5€$
Le prix baisse de 5€.

b) variation relative ou taux d'évolution

Il s'agit de comparer la variation absolue par rapport à la valeur initiale du produit.

On appelle donc variation relative, ou taux d'évolution de y_1 vers y_2 la quantité

$$t = \frac{y_2 - y_1}{y_1}$$

remarque: lorsque $t > 0$ il s'agit d'une hausse

lorsque $t < 0$ il s'agit d'une baisse.

si $t = 0$ la valeur stagne

Exemple: si un prix passe de 12€ à 7€, il baisse, et le pourcentage de baisse (taux d'évolution) est :

$$t = \frac{y_2 - y_1}{y_1} = \frac{7 - 12}{12} = \frac{-5}{12} = -0,4167 = \frac{-41,67}{100}$$

soit -41,67%

$$12 \text{ €} \xrightarrow{-41,67\%} 7 \text{ €}$$

attention: Si le prix revient à son prix initial, aura-t-il augmenté de 41,67% ?

Non, car $\underbrace{41,67\% \text{ de } 7 \text{ €}}_{\text{inférieur à } 3,50 \text{ €}}$ représentent moins que 41,67% de 12€

$$7 \text{ €} \xrightarrow{+71,43\%} 12 \text{ €}$$

$$t' = \frac{y_2 - y_1}{y_1} = \frac{12 - 7}{7} = \frac{5}{7}$$

$$= 0,7143 = \frac{71,43}{100}$$

soit 71,43%

remarque: +71,43% est le taux d'évolution réciproque permettant de compenser une baisse de 41,67%

$$12 \text{ €} \xrightarrow{-41,67\%} 7 \text{ €} \xrightarrow{+71,43\%} 12 \text{ €}$$

$$\xrightarrow{0\%}$$

on n'ajoute pas les pourcentages : on voit bien que 0% ne correspond pas à ~~-41,67% + 71,43%~~ On n'ajoute pas les taux d'évolution

2) Coefficient multiplicateur

Le coefficient multiplicateur associé à une évolution de taux t est donné par la relation $c = 1 + t$

exemple: Déterminer les coefficients multiplicateurs associés aux évolutions suivantes.

a) hausse de 13% : $t = 13\% = \frac{13}{100} = 0,13$

$$c = 1 + t = 1 + 0,13 = 1,13$$

b) baisse de 16% : $t = -16\% = -\frac{16}{100} = -0,16$

$$c = 1 + t = 1 + (-0,16) = 1 - 0,16 = 0,84$$

c) Calculer les taux d'évolution associés aux coefficients multiplicateurs

suivants: $c_1 = 0,85$ $c_2 = 1,12$.

$$c_1 = 1 + t_1$$

$$0,85 = 1 + t_1$$

$$c_2 = 1 + t_2$$

$$1,12 = 1 + t_2$$

- on isole l'inconnue (t_1 ou t_2) dans le membre dans lequel elle est précédée d'un signe +. On obtient, en remplaçant les données connues, de la gauche vers la droite:

$$0,85 - 1 = t_1$$

$$-0,15 = t_1$$

$$1,12 - 1 = t_2$$

$$0,12 = t_2$$

- on lit à l'envers:

$$t_1 = -0,15$$

$$t_2 = 0,12$$

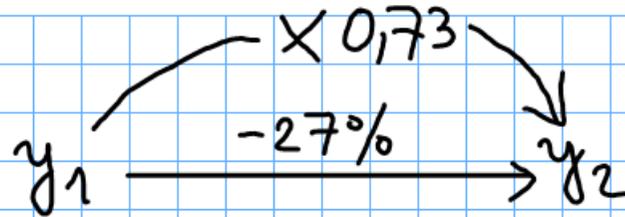
$$t_1 = -\frac{15}{100} = -15\%$$

$$t_2 = \frac{12}{100} \text{ soit } t = +12\%$$

Lorsque $c > 1$ il s'agit d'une hausse; lorsque $c < 1$ on a une baisse mais c est toujours un nombre positif.

notation: Le taux d'évolution est représenté par une flèche horizontale tandis que le coefficient multiplicateur est indiqué par une flèche arrondie

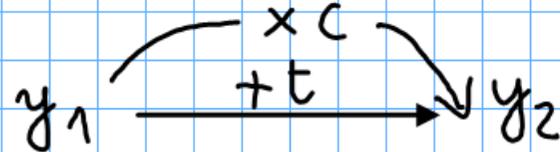
exemple: $t = -27\%$ $c = 1 + t = 1 + \left(\frac{-27}{100}\right) = 1 - 0,27 = 0,73$



Le schéma permet d'établir que $y_1 \times 0,73 = y_2$

ainsi si on connaît y_1 et y_2 , alors le coefficient

multiplicateur est égal à $c = \frac{y_2}{y_1}$

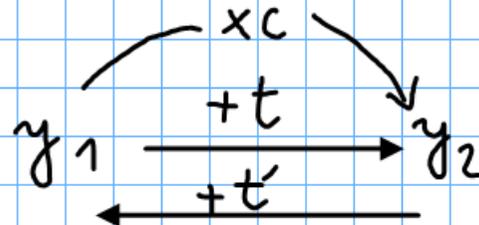


$$y_1 \times c = y_2$$

$$c = \frac{y_2}{y_1}$$

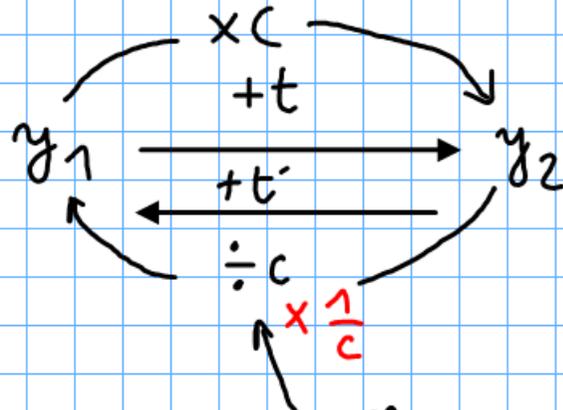
3. Evolution réciproque

On considère le mécanisme suivant:



Le but est de déterminer le taux t' permettant de revenir à la situation initiale.

De la gauche vers la droite, l'opération est " $\times c$ ". De la droite vers la gauche, l'opération sera donc " $\div c$ ".



coefficient diviseur ?? nous cherchons un coefficient MULTIPLIATEUR, " $\times c'$ "

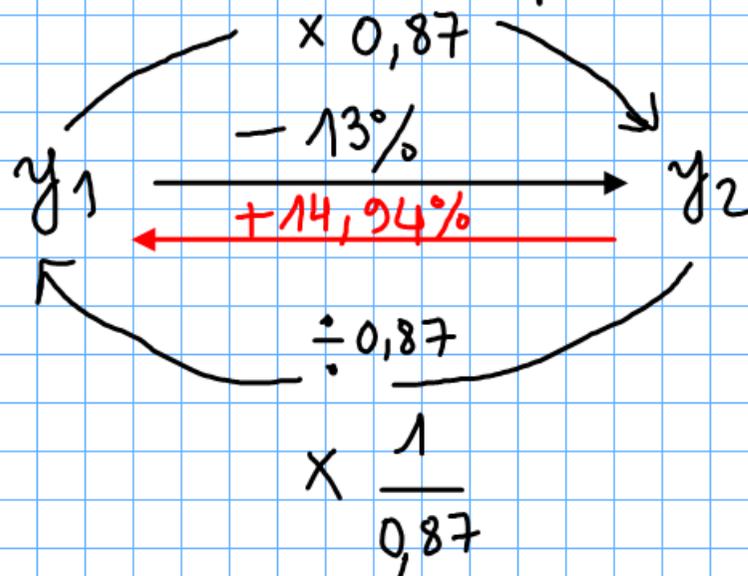
Méthode: diviser par c revient à multiplier par l'inverse de c , or

l'inverse de c est $\frac{1}{c}$. $c' = \frac{1}{c}$

Pour obtenir t' , on applique la formule $c' = 1 + t'$,

$$c' - 1 = t' \text{ soit } \underline{\underline{t' = c' - 1}}$$

Exemple: Le prix d'une action a baissé de 13%, de combien doit augmenter l'action pour retrouver sa valeur initiale.



$$c = 1 + t$$

$$= 1 + \left(-\frac{13}{100}\right) = 1 - 0,13$$

$$= 0,87$$

$$c' = \frac{1}{0,87} = 1,1494$$

$$c' = 1 + t'$$

$$1,1494 = 1 + t'$$

$$1,1494 - 1 = t' \text{ soit } t' = 0,1494$$

$$= 14,94\%$$

L'évolution réciproque d'une baisse de 13%

est une hausse de 14,94%

4) Évolutions successives

Dans le cas d'évolutions successives, les taux d'évolution ne s'ajoutent pas

Exemple:

$$y_1 \xrightarrow{+10\%} y_2 \xrightarrow{+15\%} y_3$$

$$\xrightarrow{+25\%?}$$

nous allons voir qu'augmenter successivement de 10% puis de 15% supplémentaires ne revient pas à augmenter de 25%

En effet :

$$y_1 \xrightarrow{+10\%} y_2 \xrightarrow{+15\%} y_3$$

Diagram illustrating the calculation of y_3 from y_1 through successive percentage increases:

- $y_1 \xrightarrow{\times 1,1} y_2$
- $y_2 \xrightarrow{\times 1,15} y_3$
- Direct path: $y_1 \xrightarrow{\times 1,1 \times 1,15} y_3$

$$y_2 = y_1 \times 1,1$$

$$y_3 = y_2 \times 1,15$$

$$y_3 = y_1 \times 1,1 \times 1,15$$

coefficient multiplicateur global : C_G

On multiplie entre eux les coefficients multiplicateurs pour obtenir le coefficient multiplicateur global C_G .

$$C_G = 1,1 \times 1,15 = 1,265$$

Pour calculer le taux global T_G correspondant, il suffit d'appliquer la formule $C_G = 1 + T_G$

$$\text{ici on a: } 1,265 = 1 + t_G$$

$$1,265 - 1 = t_G$$

$$0,265 = t_G \quad \text{soit } t_G = 26,5\%$$

III Indices en base 100

Cas concret : on souhaite pouvoir comparer facilement l'évolution de la production de 2 entreprises A et B entre 2002 et 2006.

entreprise A

2002	2003	2004	2005	2006
4230	4780	3974	4992	5110

entreprise B

2002	2003	2004	2005	2006
3200	3780	3250	4000	4230

1) L'année de référence:

L'année de référence est l'année de base, par rapport à laquelle on va comparer la production des autres années. On attribue à l'année de base l'indice 100. Dans notre exemple, si on affecte l'indice 100 à l'année 2002, toutes les comparaisons s'effectueront par rapport à l'année 2002 uniquement.

2) Principe de calcul

On travaille toujours avec la colonne de base, et on procède par produits en croix pour obtenir les différents indices.

entreprise A

2002	2003	2004	2005	2006	année
4230	4780	3974	4992	5110	production
100	113	93,95	118	120,8	indices

$I_{2003} = \frac{100 \times 4780}{4230}$
 $I_{2004} = \frac{100 \times 3974}{4230}$
 $I_{2005} = \frac{100 \times 4992}{4230}$