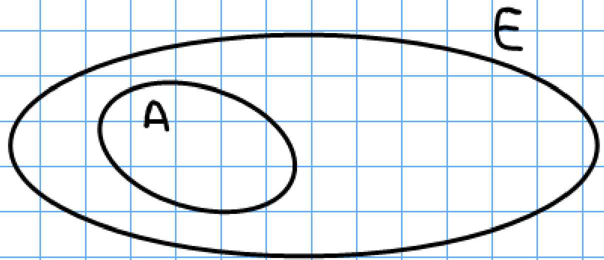
Chapitre 1 : Proportions et taux d'évolution.

I Proportions et pourcentages

1) Définitions



Soit A une partie d'un ensemble E.

Si n_E et n_A sont respectivement les nombres d'éléments de E et de A (effectif de E et de A), la proportion des éléments de A dans E (ou par rapport à E) est le quotient

$$\boxed{p = \frac{n_A}{n_E}}$$

E est la population de référence.

2) Pourcentages

prendre t% d'une valeur c'est la multiplier par $\frac{t}{100}$

<u>exemple :</u> l'effectif total du lycée Colbert est de 360 élèves dont 57 % d'élèves de seconde. Déterminons le nombre d'élèves de seconde.

$$\frac{57}{100} \times 360 = 0,57 \times 360 = 205,2 \approx 205 \text{ élèves}$$

$\frac{57}{100} \downarrow$ 57 % ; $360 \downarrow$ "de" 360 élèves

remarque : pour écrire un nombre décimal sous la forme d'un pourcentage, on cherche le numérateur de la fraction dont le dénominateur est égal à 100.

0,6527 x 100

exemple : $p = 0,6527 = \frac{65,27}{100} = 65,27\,\%$

Méthodes

(A) Calculer une proportion :

Dans une classe de $1^{ère}$ de 35 élèves, 9 élèves font du ski.

Calculer la proportion p d'élèves qui font du ski : donner p sous la forme d'une fraction, puis donner sa valeur décimale arrondie à 10^{-3} près et en déduire l'expression de p sous la forme d'un pourcentage.

rédaction :

- la population de référence E est la classe de $1^{ère}$; $n_E = 35$
- la sous-population A est formée des élèves pratiquant le ski ; $n_A = 9$
- la proportion d'élèves de la classe qui font du ski est

$$p = \underbrace{\frac{n_A}{n_E} = \frac{9}{35}}_{\text{fraction}} = \underbrace{0,257}_{\text{forme décimale à } 10^{-3} \text{ près}} = \frac{25,7}{100} = \underbrace{25,7\,\%}_{\text{pourcentage}}$$

B) Calculer l'effectif d'une population

Dans un village 697 habitants vivent de l'agriculture, ce qui représente 82% de la population. Combien y-a-t'il d'habitants dans le village ?

rédaction : • la population de référence E est formée de la population du village et $n_E = ?$

• la sous-population A est formée des habitants vivant de l'agriculture et $n_A = 697$

par définition $p = \dfrac{n_A}{n_E}$ $\qquad \dfrac{82}{100} = \dfrac{697}{n_E}$

par produit en croix, on obtient $n_E = \dfrac{697 \times 100}{82}$

$n_E = 850$

Le village compte 850 habitants

3. Proportions et réunion, intersection

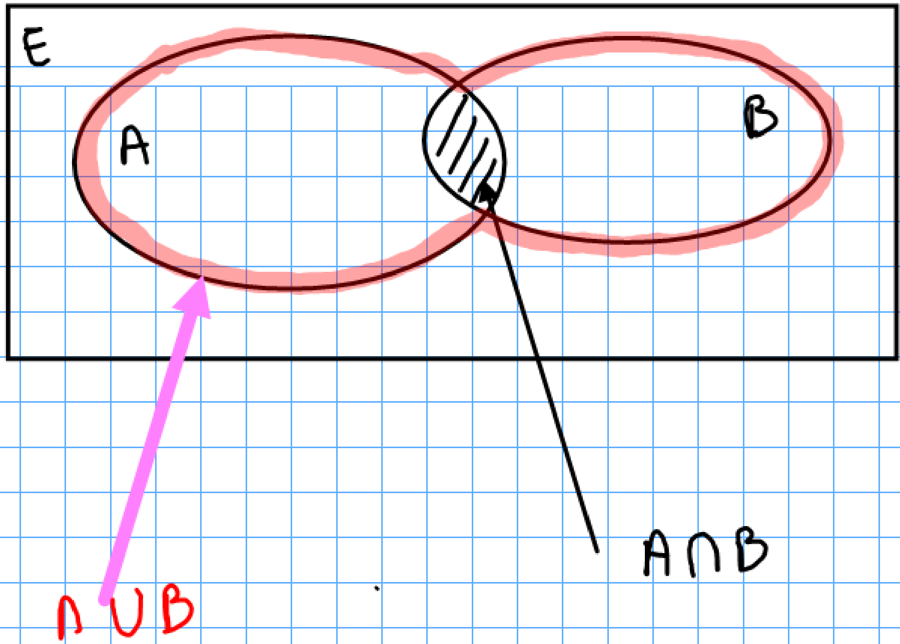
Si A et B sont deux parties (ou sous-populations) d'un même ensemble E (population de référence), d'effectifs respectifs n_A, n_B, et n_E, l'ensemble des éléments qui appartiennent à l'une au moins des parties A ou B est noté $A \cup B$

l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A ET à B, c'est à dire qui sont communs aux deux parties A et B est noté $A \cap B$.

En mathématiques, la conjonction de coordination OU se traduit par $\cup$ (union) tandis que ET se traduit par $\cap$ (intersection)

$A \cup B$ se lit « A union B »

$A \cap B$ se lit « A inter B »



Exemple :

- E : classe de 1STMG3 ; $n_E = 22$
- A : sous-population constituée des élèves de 1STMG3 qui aiment les maths ; $n_A = 8$
- B : sous-population constituée des élèves de 1STMG3 qui aiment le sport ; $n_B = 14$
- $A \cap B$: sous-population des élèves de 1STMG3 qui aiment le sport et les maths ; $n_{A \cap B} = 6$
- $A \cup B$: sous-population des élèves de 1STMG3 qui aiment au moins une de ces disciplines $n_{A \cup B} = 16$

Propriété :

$$\boxed{\begin{array}{l} n_{A \cup B} = n_A + n_B - n_{A \cap B} \\ p_{A \cup B} = p_A + p_B - p_{A \cap B} \end{array}}$$

II Taux d'évolution ou variation relative

1) Vocabulaire et notations.

On étudie la façon dont une quantité y_1 évolue vers un stade y_2

on note : $y_1 \longrightarrow y_2$

a) variation absolue

on appelle variation absolue la quantité $y_2 - y_1$

- si la variation absolue est positive, cela signifie que $y_2 > y_1$ donc on a affaire à une augmentation ou hausse.
- si la variation absolue est négative, cela traduit le fait que $y_2 < y_1$: on a affaire à une baisse ou diminution.

Le signe de la variation absolue est donc très important.

<u>Exemple :</u>

un prix passe de 12 € à 7 €, la variation absolue est de $7 - 12 = -5$ €

Le prix baisse de 5€.

b) variation relative ou taux d'évolution

Il s'agit de comparer la variation absolue par rapport à la valeur initiale du produit.

On appelle donc variation relative, ou taux d'évolution de y_1 vers y_2 la quantité

$$\boxed{t = \frac{y_2 - y_1}{y_1}}$$

<u>remarque :</u> lorsque $t > 0$ il s'agit d'une hausse

lorsque $t < 0$ il s'agit d'une baisse.

si $t = 0$ la valeur stagne

Exemple : si un prix passe de 12€ à 7 €, il baisse, et le pourcentage de baisse (taux d'évolution) est :

$$t = \frac{y_2 - y_1}{y_1} = \frac{7 - 12}{12} = \frac{-5}{12} = -0,4167 = -\frac{41,67}{100}$$

soit $-41,67\%$

$$12€ \xrightarrow{-41,67\%} 7€$$

attention : Si le prix revient à son prix initial, aura-t-il augmenté de 41,67% ?

Non, car $\underbrace{41,67\% \text{ de } 7€}_{\text{inférieur à } 3,50€}$ représentent moins que 41,67% de 12€

$$7€ \xrightarrow{+71,43\%} 12€$$

$$t' = \frac{y_2 - y_1}{y_1} = \frac{12-7}{7} = \frac{5}{7}$$

$$= 0,7143 = \frac{71,43}{100}$$

soit 71,43%

<u>Remarque</u> : +71,43 % est le taux d'évolution réciproque permettant de compenser une baisse de 41,67 %

$$12\,€ \xrightarrow{-41{,}67\,\%} 7\,€ \xrightarrow{+71{,}43\,\%} 12\,€$$

$$\xrightarrow{\quad\quad 0\,\% \quad\quad}$$

On n'ajoute pas les pourcentages : on voit bien que 0 % ne correspond pas à $\cancel{-41{,}67\,\% + 71{,}43\,\%}$

On n'ajoute pas les taux d'évolution

2) Coefficient multiplicateur

Le coefficient multiplicateur associé à une évolution de taux t est donné par la relation $c = 1 + t$

exemple : Déterminer les coefficients multiplicateurs associés aux évolutions suivantes.

a) hausse de 13% : $t = 13\% = \frac{13}{100} = 0,13$

$$c = 1 + t = 1 + 0,13 = 1,13$$

b) baisse de 16% : $t = -16\% = -\frac{16}{100} = -0,16$

$$c = 1 + t = 1 + (-0,16) = 1 - 0,16 = 0,84$$

c) Calculez les taux d'évolution associés aux coefficients multiplicateurs suivants : $c_1 = 0{,}85$ $c_2 = 1{,}12$.

$c_1 = 1 + t_1$ $c_2 = 1 + t_2$

$0{,}85 = 1 + t_1$ $1{,}12 = 1 + t_2$

- on isole l'inconnue (t_1 ou t_2) dans le membre dans lequel elle est précédée d'un signe +. On obtient, en remplaçant les données connues, de la gauche vers la droite :

$0{,}85 - 1 = t_1$ $1{,}12 - 1 = t_2$

$-0{,}15 = t_1$ $0{,}12 = t_2$

- on lit à l'envers :

$t_1 = -0{,}15$ $t_2 = 0{,}12$

$t_1 = -\frac{15}{100} = -15\%$ $t_2 = \frac{12}{100}$ soit $t = +12\%$

Lorsque $c > 1$ il s'agit d'une hausse ; lorsque $c < 1$ on a une baisse mais c est toujours un nombre positif.

<u>notation</u> : Le taux d'évolution est représenté par une flèche horizontale tandis que le coefficient multiplicateur est indiqué par une flèche arrondie

<u>exemple</u> : $t = -27\%$ $\quad c = 1 + t = 1 + \left(\frac{-27}{100}\right) = 1 - 0{,}27 = 0{,}73$

$$\begin{tikzcd} y_1 \arrow[r, "-27\%"] \arrow[r, bend left, "\times 0{,}73"] & y_2 \end{tikzcd}$$

Le schéma permet d'établir que $y_1 \times 0{,}73 = y_2$

ainsi si on connaît y_1 et y_2, alors le coefficient multiplicateur est égal à $c = \frac{y_2}{y_1}$

$$\begin{tikzcd} y_1 \arrow[r, "+t"] \arrow[r, bend left, "\times c"] & y_2 \end{tikzcd}$$

$y_1 \times c = y_2$

$c = \frac{y_2}{y_1}$

3. Évolution réciproque

On considère le mécanisme suivant :

$$\begin{tikzcd} y_1 \arrow[r, "+t"] \arrow[r, bend left, "\times c"] & y_2 \arrow[l, bend left, "+t'"] \end{tikzcd}$$

Le but est de déterminer le taux t' permettant de revenir à la situation initiale.

De la gauche vers la droite, l'opération est "$\times c$". De la droite vers la gauche, l'opération sera donc "$\div c$".

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
y_1 \arrow[r, bend left=50, "\times c"] \arrow[r, "+t"] & y_2 \arrow[l, bend left=50, "\div c \;\; \times \frac{1}{c}"] \arrow[l, shift left=2, "+t'"]
\end{tikzcd}
$$

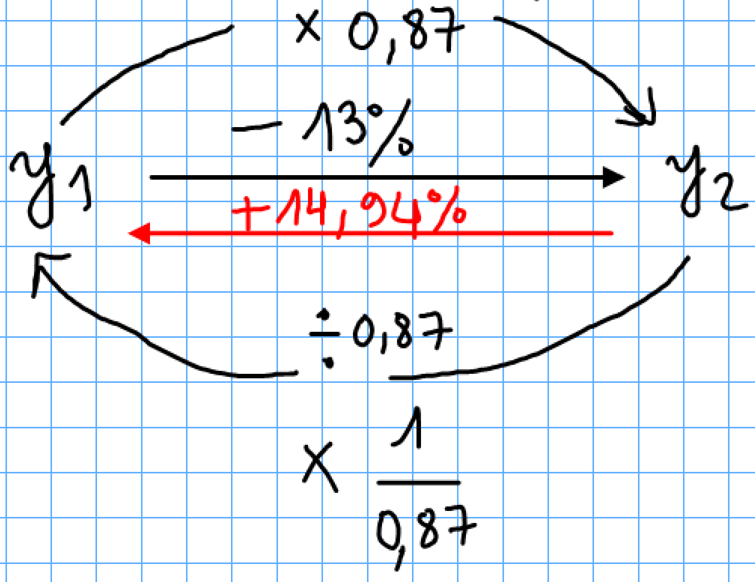
coefficient diviseur ?? nous cherchons un coefficient MULTIPLICATEUR, "$\times c'$"

__Méthode :__ diviser par c revient à multiplier par l'inverse de c, or l'inverse de c est $\dfrac{1}{c}$. $c' = \dfrac{1}{c}$

Pour obtenir t', on applique la formule $c' = 1 + t'$

$c' - 1 = t'$ soit $\underline{\underline{t' = c' - 1}}$

<u>Exemple</u> : Le prix d'une action a baissé de 13%, de combien doit augmenter l'action pour retrouver sa valeur initiale.



$c = 1 + t$

$= 1 + \left(-\frac{13}{100}\right) = 1 - 0,13$

$= 0,87$

$c' = \frac{1}{0,87} = 1,1494$

$c' = 1 + t'$

$1,1494 = 1 + t'$

$1,1494 - 1 = t'$ soit $t' = 0,1494$

$= 14,94\%$

L'évolution réciproque d'une baisse de 13% est une hausse de 14,94 %

4) Évolutions successives

Dans le cas d'évolutions successives, les taux d'évolution ne s'ajoutent pas

Exemple :

$$\begin{tikzcd} y_1 \arrow[r, "+10\%"] \arrow[rr, bend right, "+25\%\ ?"'] & y_2 \arrow[r, "+15\%"] & y_3 \end{tikzcd}$$

nous allons voir qu'augmenter successivement de 10% puis de 15% supplémentaires ne revient pas à augmenter de 25%

En effet :

$$\begin{tikzcd} y_1 \arrow[r, "+10\%"] \arrow[r, bend left, "\times 1{,}1"] \arrow[rr, bend right, "\times 1{,}1 \times 1{,}15"'] & y_2 \arrow[r, "+15\%"] \arrow[r, bend left, "\times 1{,}15"] & y_3 \end{tikzcd}$$

coefficient multiplicateur global : C_G

$y_2 = y_1 \times 1{,}1$

$y_3 = y_2 \times 1{,}15$

$y_3 = y_1 \times 1{,}1 \times 1{,}15$

Méthode :

On multiplie entre eux les coefficients multiplicateurs pour obtenir le coefficient multiplicateur global C_G.

$C_G = 1,1 \times 1,15 = 1,265$

Méthode :

Pour calculer le taux global T_G correspondant, il suffit d'appliquer la formule $C_G = 1 + T_G$

ici on a : $1,265 = 1 + t_G$

$1,265 - 1 = t_G$

$0,265 = t_G$ soit $t_G = 26,5\%$

III Indices en base 100

Cas concrêt : on souhaite pouvoir comparer facilement l'évolution de la production de 2 entreprises A et B entre 2002 et 2006.

entreprise A

2002	2003	2004	2005	2006
4230	4780	3974	4992	5110

entreprise B

2002	2003	2004	2005	2006
3200	3780	3250	4000	4230

1) L'année de référence :

L'année de référence est l'année de base, par rapport à laquelle on va comparer la production des autres années. On attribue à l'année de base l'indice 100. Dans notre exemple, si on affecte l'indice 100 à l'année 2002, toutes les comparaisons s'effectueront par rapport à l'année 2002 uniquement.

2) Principe de calcul

On travaille toujours avec la colonne de base, et on procède par produits en croix pour obtenir les différents indices.

entreprise A

2002	2003	2004	2005	2006	année
4230	4780	3974	4992	5110	production
100	113	93,95	118	120,8	indices

$I_{2003} = \dfrac{100 \times 4780}{4230}$ $\quad I_{2004} = \dfrac{100 \times 3974}{4230}$ $\quad I_{2005} = \dfrac{100 \times 4992}{4230}$

	2002	2003	2004	2005	2006
Ent. 1	**100**	113	93.95	118	120.8
Ent. 2	**100**	118.1	101.6	125	132.2

3) Exploitation des tableaux d'indices

	2002	2003	2004	2005	2006
Ent. 1	100	113	93.95	118	120.8
Ent. 2	100	118.1	101.6	125	132.2

- Lorsque la production augmente l'indice augmente : entre 2005 et 2006, la production de l'entreprise A augmente en passant de 4992 à 5110, de même l'indice a augmenté en passant de 118 à 120,8.
- Lorsque la production diminue, l'indice diminue également : entre 2003 et 2004 la production de l'entreprise B a baissé, de même l'indice est passé de 118,1 à 101,6.
- Si on part de l'année de référence, les tableaux d'indice permettent de lire directement le taux d'évolution entre l'année de base et une autre année :

par exemple : pour l'entreprise A, on passe entre 2002 et 2005 de l'indice 100 à l'indice 118, soit une hausse de 18%.

- attention, le tableau ne permet pas d'obtenir par lecture directe le taux d'évolution entre 2003 et 2005 car 2003 n'est pas l'année de référence. Si on veut connaître le taux d'évolution on doit appliquer la formule $t = \dfrac{y_2 - y_1}{y_1}$ pour « y » on peut travailler avec les indices ou avec les productions.

$$t = \frac{118 - 113}{113} = \frac{5}{113} = 0{,}044 = \frac{4{,}4}{100} \text{ soit } 4{,}4\%$$

on peut aussi placer l'indice 100 à l'année 2003

2003	2005
4780	4992
100	104,4

$$I_{2005} = \frac{100 \times 4992}{4780} = 104{,}4$$

- De 2002 à 2004, l'indice de l'entreprise A passe de 100 à 93,95 ce qui traduit une baisse de 6,05%.