Fiche de correction de devoir maison : DM1

Problème 1 :

1) -1 est une racine de $f(x)$ si et seulement si $f(-1)=0$

$f(x) = -x^3 - 3x^2 + 13x + 15$

$f(-1) = -(-1)^3 - 3\times(-1)^2 + 13\times(-1) + 15$

$= -(-1) - 3\times(1) - 13 + 15 = +1 - 3 - 13 + 15$

$f(-1) = 0$

Méthode : soit $P(x)$ un polynôme, si a est une racine de $P(x)$, il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x-a)\times Q(x)$.

$d°Q < d°P$

degré du polynôme = exposant de x le plus haut

ici $a=-1$, on peut donc factoriser $f(x)$ par $x-a = x-(-1)$
$= x+1$.

2. $f(x) = (x+1)(ax^2+bx+c)$

$\Leftrightarrow -x^3 - 3x^2 + 13x + 15 = ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c$

on va identitifier les coefficients respectifs des puissances de x

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a+b = -3 \\ b+c = 13 \\ c = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -3-a = -3+1 = -2 \\ c = 15 \\ -2+15 = 13 \end{cases}$

on a donc montré que $f(x) = (x+1)(-x^2-2x+15)$

3- a- on doit factoriser le trinôme $Q(x) = -x^2-2x+15$

en déterminant ses racines à l'aide de $\Delta = b^2-4ac$

avec $a=-1$ $b=-2$ $c=15$

$\Delta = (-2)^2 - 4\times(-1)\times(15)$

$= 4 + 4\times 15 = 64$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{64} = 8$

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{+2-8}{2\times(-1)}$ $x_2 = \dfrac{+2+8}{2\times(-1)}$

$x_1 = \dfrac{-6}{-2}$ $x_2 = \dfrac{10}{-2}$

$x_1 = 3$ $x_2 = -5$

Astuce ! le produit $x_1 x_2$ des racines est égal à $\dfrac{c}{a}$

vérifions donc que nous avons bien calculé x_1 et x_2

on rappelle que ax^2+bx+c se factorise en $a(x-x_1)(x-x_2)$

la forme factorisée de $Q(x)$ est donc $-1(x-3)(x+5)$

Au bilan comme $f(x) = (x+1) \times Q(x)$

$$f(x) = -1 \times (x+1)(x-3)(x+5)$$

ou encore $\boxed{f(x) = -(x+1)(x-3)(x+5)}$

b) Résolution de $f(x) > 0$

On dresse un tableau de signe.

$\boxed{f(x) > 0 : S = \left]-\infty ; -5\right[\cup \left]-1 ; 3\right[}$

x	$-\infty$		-5		-1		3		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
produit		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

astuce : on aurait pu ne faire que 2 lignes dans le tableau
- une ligne pour le signe de (x +1) : dans une expression du type ax+b, le signe de "a" (c'est à dire le signe + car a=1) est à droite de zéro.
- une ligne pour -(x-3)(x+5). En effet, on sait que pour une expression du second degré le signe de "a" (c'est à dire le signe - car a = -1)est à l'extérieur des racines

Problème 2

$f(x) = -3x^2 + 2x + 1$

1- $\mathcal{C}$ est une parabole tournée vers le bas car $a = -3$; $a < 0$.

Le sommet S a pour coordonnées $S(\alpha ; \beta)$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$

$\beta = f(\alpha)$

on a $a = -3$; $b = 2$; $c = 1$

donc $\alpha = \frac{-2}{2 \times (-3)} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$

$$\beta = f(\alpha) = f\left(\frac{1}{3}\right) = -3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{1}{3}\right) + 1$$

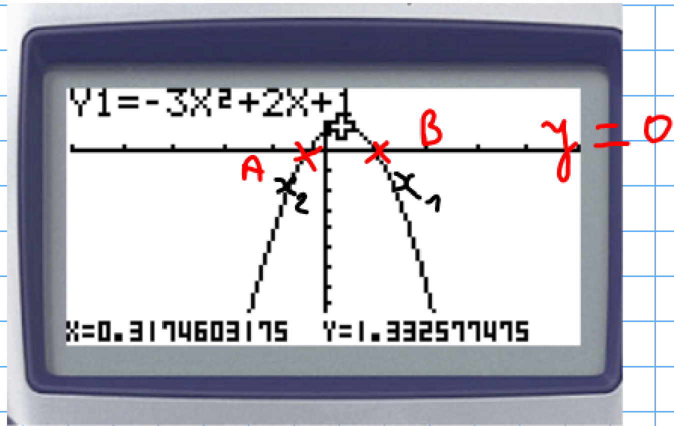
$$= -3 \times \frac{1^2}{3^2} + \frac{2}{3} + 1$$

$$= -3 \times \frac{1}{9} + \frac{2}{3} + 1 = -\cancel{3} \times \frac{1}{3 \times \cancel{3}} + \frac{2}{3} + 1$$

$$= \frac{1}{3} + 1 = \frac{1}{3} + \frac{3}{3} = \frac{4}{3}$$

$S\left(\frac{1}{3} ; \frac{4}{3}\right)$

La courbe $\mathcal{C}$ coupe 2 fois l'axe des abscisses (droite d'équation $y = 0$) si et seulement si l'équation $f(x) = 0$ admet 2 solutions.



$-3x^2 + 2x + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \times (-3) \times (1)$

$= 4 + 12 = 16$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $\qquad x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{-2 - 4}{2 \times (-3)}$ $\qquad x_2 = \dfrac{-2 + 4}{2 \times (-3)}$

$x_1 = \dfrac{-6}{-6} = 1$ $\qquad x_2 = \dfrac{2}{-6} = -\dfrac{2}{6} = -\dfrac{1}{3}$

$A(x_2 ; 0) \qquad B(x_1 ; 0)$

$A(-\frac{1}{3} ; 0) \qquad B(1 ; 0)$

3. On doit résoudre $f(x) > 0$ $\qquad f(x) > 0 : \mathcal{S} =]-\frac{1}{3} ; 1[$.
Le trinôme est du signe de $(-a)$ à l'intérieur des racines.

Problème 3 :

$B(q) = R(q) - C(q) \quad 0 \leqslant q \leqslant 80$

1) 1 tonne est vendue 120 €

q tonnes sont vendues $q \times 120$ soit $120q$

on en déduit que $R(q) = 120q$

2) $C(q) = 2q^2 + 10q + 900$

a) L'activité est rentable dès que l'on dégage un bénéfice :

$B(q) > 0$

$R(q) - C(q) > 0 \iff R(q) > C(q)$

$$B(q) = R(q) - C(q) = 120q - (2q^2 + 10q + 900)$$
$$= 120q - 2q^2 - 10q - 900$$
$$B(q) = -2q^2 + 110q - 900$$

on cherche à résoudre $B(q) > 0$

soit $-2q^2 + 110q - 900 > 0$

on sait que le trinôme est du signe de $(-a)$ donc positif dans ce cas, à l'intérieur des racines q_1 et q_2 que nous allons calculer.

$\Delta = b^2 - 4ac$ avec $a = -2$ $b = 110$ $c = -900$

$\Delta = (110)^2 - 4 \times (-2) \times (-900) = 110^2 - 8 \times 900 = 4900$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{49 \times 100} = \sqrt{49} \times \sqrt{100} = 7 \times 10 = 70$

$q_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $\qquad$ $q_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$= \dfrac{-110 - 70}{2 \times (-2)} = 45$ $\qquad$ $q_2 = \dfrac{-110 + 70}{2 \times (-2)} = 10$

L'activité de l'entreprise est rentable pour une production comprise entre 10 et 45 tonnes

b) Le maximum de la fonction B est atteint pour $q = -\frac{b}{2a}$

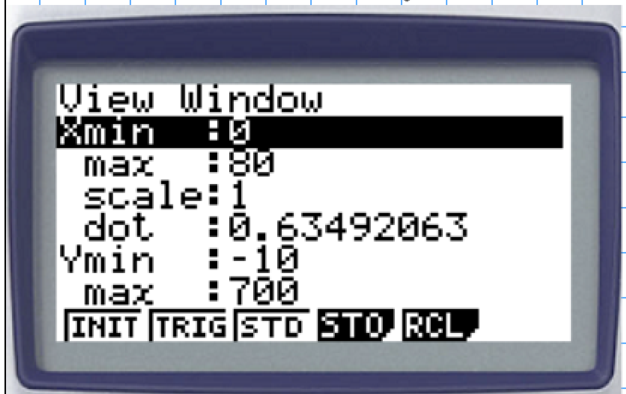
En effet $\mathcal{C}_B$ est une parabole tournée vers le bas car $a < 0$.

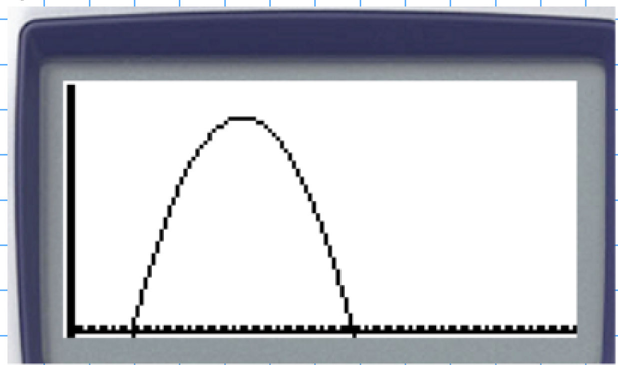
Le tableau de variation est donc de la forme :

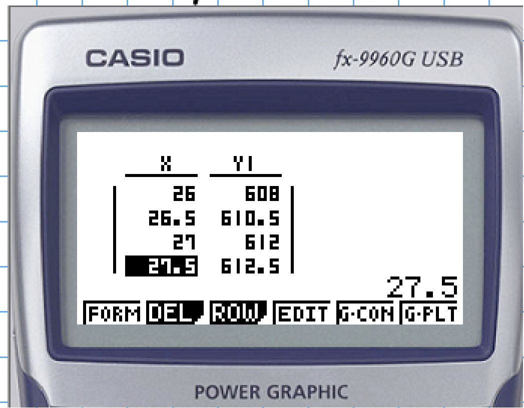
q		α	
$B(q)$	$\nearrow$		$\searrow$

$\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{-110}{2\times(-2)} = 27{,}5$ tonnes soit 27500 kg

Le bénéfice correspondant est de $B(27{,}5) = 612{,}5$ €







Exercice chapitre 1 :

1) a. 30% de 900 élèves = $\frac{30}{100}x900 = 0,3x900 = 270$ élèves inscrits en 1ES

   b. 162x100 : 25 = 648 filles dans le lycée

Effectif	pourcentage
162	25
?	100

2) diminuer de 15% revient à multiplier par 0,85. 50x0,85 = 42,5€
3) avec les indices : ? = 100x135 : 60 = 225 l'augmentation est donc de 125%

date	janvier	décembre
Prix	60	135
indice	100	?

4) augmenter de 30% revient à multiplier par 1,3
   baisser de 10% revient à multiplier par 0,9.

   Globalement le prix est multiplié par 1,3x0,9=1,17 soit une hausse de 17%

5) On cherche l'évolution réciproque correspondant à une hausse de 25%
   augmenter de 25% revient à multiplier par 1,25.
   pour revenir à la situation initiale, il faut diviser par 1,25 ce qui revient à multiplier par
   $\frac{1}{1,25} = 0,8$ ce qui correspond à une baisse de 20%.

6) On multiplie par 1,1 puis par 0,8 puis par 1,3 : globalement on a multiplié par
   1,1x0,8x1,3 = 1,144. Pour revenir à la situation de départ, il faudra diviser par 1,144
   ce qui revient à multiplier par $\frac{1}{1,144} = 0,8741$ ce qui représente une baisse de 12,59%