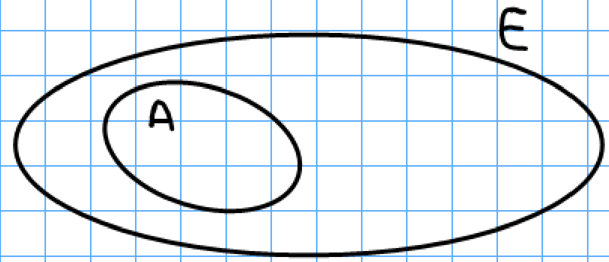
Chapitre 1 : Proportions et taux d'évolution.

I Proportions et pourcentages

1) Définitions



Soit A une partie d'un ensemble E.

Si n_E et n_A sont respectivement les nombres d'éléments de E et de A (effectif de E et de A),

la **proportion** des éléments de A dans E (ou par rapport à E) est le quotient

$$\boxed{p = \frac{n_A}{n_E}}$$

E est la population de référence.

2) Pourcentages

prendre t% d'une valeur c'est la multiplier par $\frac{t}{100}$

<u>exemple :</u> l'effectif total du lycée Colbert est de 360 élèves dont 57 % d'élèves de seconde. Déterminons le nombre d'élèves de seconde.

$$\frac{57}{100} \times 360 = 0,57 \times 360 = 205,2 \simeq 205 \text{ élèves}$$

57 % "de" 360 élèves

remarque : pour écrire un nombre décimal sous la forme d'un pourcentage, on cherche le numérateur de la fraction dont le dénominateur est égal à 100.

0,6527 x 100

exemple : $p = 0,6527 = \frac{65,27}{100} = 65,27\,\%$

Méthodes

(A) Calculer une proportion :

Dans une classe de $1^{ère}$ de 35 élèves, 9 élèves font du ski.

Calculer la proportion p d'élèves qui font du ski : donner p sous la forme d'une fraction, puis donner sa valeur décimale arrondie à 10^{-3} près et en déduire l'expression de p sous la forme d'un pourcentage.

rédaction :

- la population de référence E est la classe de $1^{ère}$; $n_E = 35$
- la sous-population A est formée des élèves pratiquant le ski ; $n_A = 9$
- la proportion d'élèves de la classe qui font du ski est

$$p = \underbrace{\frac{n_A}{n_E} = \frac{9}{35}}_{\text{fraction}} \approx \underbrace{0{,}257}_{\text{forme décimale à } 10^{-3} \text{ près}} = \frac{25{,}7}{100} = \underbrace{25{,}7\,\%}_{\text{pourcentage}}$$

(B) Calculer l'effectif d'une population

Dans un village 697 habitants vivent de l'agriculture, ce qui représente 82% de la population. Combien y-a-t-il d'habitants dans le village ?

rédaction : . la population de référence E est formée de la population du village et $n_E = ?$

. la sous-population A est formée des habitants vivant de l'agriculture et $n_A = 697$

par définition $p = \frac{n_A}{n_E}$ $\qquad \frac{82}{100} = \frac{697}{n_E}$

par produit en croix, on obtient $n_E = \frac{697 \times 100}{82}$

$n_E = 850$

Le village compte 850 habitants

3. Proportions et réunion, intersection

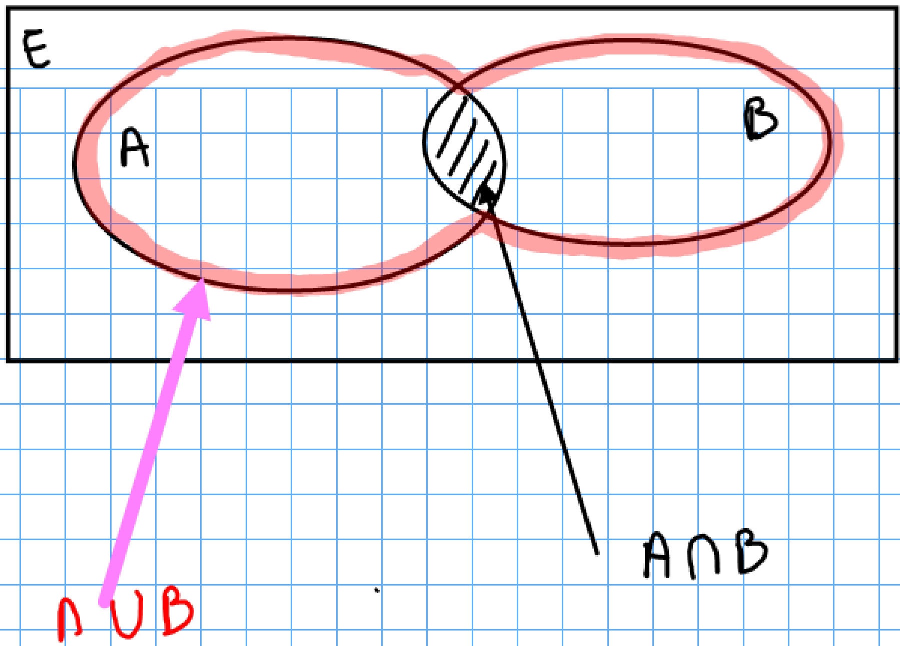
Si A et B sont deux parties (ou sous-populations) d'un même ensemble E (population de référence), d'effectifs respectifs n_A, n_B, et n_E, l'ensemble des éléments qui appartiennent à l'une au moins des parties A ou B est noté $A \cup B$

l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A ET à B, c'est à dire qui sont communs aux deux parties A et B est noté $A \cap B$.

En mathématiques, la conjonction de coordination OU se traduit par $\cup$ (union) tandis que ET se traduit par $\cap$ (intersection)

$A \cup B$ se lit « A union B »

$A \cap B$ se lit « A inter B »



<u>Exemple :</u>

* E : classe de 1STMG3 ; $n_E = 22$
* A : sous-population constituée des élèves de 1STMG3 qui aiment les maths ; $n_A = 8$
* B : sous-population constituée des élèves de 1STMG3 qui aiment le sport ; $n_B = 14$
* $A \cap B$: sous-population des élèves de 1STMG3 qui aiment le sport et les maths ; $n_{A\cap B} = 6$
* $A \cup B$: sous-population des élèves de 1STMG3 qui aiment au moins une de ces disciplines $n_{A \cup B} = 16$

<u>Propriété</u> :

$$\boxed{\begin{array}{l} n_{A\cup B} = n_A + n_B - n_{A\cap B} \\ p_{A\cup B} = p_A + p_B - p_{A\cap B} \end{array}}$$

II Taux d'évolution ou variation relative

1) Vocabulaire et notations.

On étudie la façon dont une quantité y_1 évolue vers un stade y_2

on note : $y_1 \longrightarrow y_2$

a) variation absolue

on appelle variation absolue la quantité $y_2 - y_1$

- si la variation absolue est positive, cela signifie que $y_2 > y_1$ donc on a affaire à une augmentation ou hausse.
- si la variation absolue est négative, cela traduit le fait que $y_2 < y_1$: on a affaire à une baisse ou diminution.

Le signe de la variation absolue est donc très important.

Exemple :

un prix passe de 12 € à 7 €, la variation absolue est de $7-12=-5$€

Le prix baisse de 5€.

b) variation relative ou taux d'évolution

Il s'agit de comparer la variation absolue par rapport à la valeur initiale du produit.

On appelle donc variation relative, ou taux d'évolution de y_1 vers y_2 la quantité

$$\boxed{t = \frac{y_2 - y_1}{y_1}}$$

remarque : lorsque $t>0$ il s'agit d'une hausse

lorsque $t<0$ il s'agit d'une baisse.

si $t=0$ la valeur stagne

<u>Exemple</u> : si un prix passe de 12€ à 7 €, il baisse, et le pourcentage de baisse (taux d'évolution) est :

$$t = \frac{y_2 - y_1}{y_1} = \frac{7 - 12}{12} = \frac{-5}{12} = -0,4167 = -\frac{41,67}{100}$$

soit $-41,67\%$

$$12€ \xrightarrow{-41,67\%} 7€$$

attention : Si le prix revient à son prix initial, aura-t-il augmenté de 41,67% ?

Non, car $\underbrace{41,67\% \text{ de } 7€}_{\text{inférieur à } 3,50€}$ représentent moins que 41,67% de 12€

$$7€ \xrightarrow{+71,43\%} 12€$$

$$t' = \frac{y_2 - y_1}{y_1} = \frac{12-7}{7} = \frac{5}{7}$$

$$= 0,7143 = \frac{71,43}{100}$$

soit $71,43\%$

<u>Remarque</u> : +71,43% est le taux d'évolution réciproque permettant de compenser une baisse de 41,67 %

$$12\,€ \xrightarrow{-41{,}67\,\%} 7\,€ \xrightarrow{+71{,}43\,\%} 12\,€$$

$$\xrightarrow{\quad\quad\quad 0\,\% \quad\quad\quad}$$

on n'ajoute pas les pourcentages : on voit bien que 0% ne correspond pas à $\cancel{-41{,}67\% + 71{,}43\%}$ On n'ajoute pas les taux d'évolution

2) Coefficient multiplicateur

Le coefficient multiplicateur associé à une évolution de taux t est donné par la relation $c = 1 + t$

exemple : Déterminer les coefficients multiplicateurs associés aux évolutions suivantes.

a) hausse de 13% : $t = 13\% = \frac{13}{100} = 0{,}13$

$$c = 1 + t = 1 + 0{,}13 = 1{,}13$$

b) baisse de 16% : $t = -16\% = -\frac{16}{100} = -0{,}16$

$$c = 1 + t = 1 + (-0{,}16) = 1 - 0{,}16 = 0{,}84$$

c) Calculez les taux d'évolution associés aux coefficients multiplicateurs suivants : $c_1 = 0{,}85$ $c_2 = 1{,}12$.

$c_1 = 1 + t_1$ $c_2 = 1 + t_2$

$0{,}85 = 1 + t_1$ $1{,}12 = 1 + t_2$

- on isole l'inconnue (t_1 ou t_2) dans le membre dans lequel elle est précédée d'un signe +. On obtient, en remplaçant les données connues, de la gauche vers la droite :

$0{,}85 - 1 = t_1$ $1{,}12 - 1 = t_2$

$-0{,}15 = t_1$ $0{,}12 = t_2$

- on lit à l'envers :

$t_1 = -0{,}15$ $t_2 = 0{,}12$

$t_1 = -\frac{15}{100} = -15\%$ $t_2 = \frac{12}{100}$ soit $t = +12\%$

Lorsque $c > 1$ il s'agit d'une hausse ; lorsque $c < 1$ on a une baisse mais c est toujours un nombre positif.

<u>notation</u> : Le taux d'évolution est représenté par une flèche horizontale tandis que le coefficient multiplicateur est indiqué par une flèche arrondie

exemple : $t = -27\%$ $\quad c = 1 + t = 1 + \left(\frac{-27}{100}\right) = 1 - 0,27 = 0,73$

$$y_1 \xrightarrow[\times 0,73]{-27\%} y_2$$

Le schéma permet d'établir que $y_1 \times 0,73 = y_2$

ainsi si on connaît y_1 et y_2, alors le coefficient multiplicateur est égal à $c = \frac{y_2}{y_1}$

$$y_1 \xrightarrow[\times c]{+t} y_2$$

$$y_1 \times c = y_2$$

$$c = \frac{y_2}{y_1}$$

3. Evolution réciproque

On considère le mécanisme suivant :

$$y_1 \underset{+t'}{\overset{+t \ (\times c)}{\rightleftarrows}} y_2$$

Le but est de déterminer le taux t' permettant de revenir à la situation initiale.

De la gauche vers la droite, l'opération est "$\times c$". De la droite vers la gauche, l'opération sera donc "$\div c$".

$$\begin{tikzcd}
y_1 \arrow[r, "+t"] \arrow[r, bend left=60, "\times c"] & y_2 \arrow[l, shift left=2, "+t'"] \arrow[l, bend left=60, "\div c \ \times \frac{1}{c}"]
\end{tikzcd}$$

coefficient diviseur ?? nous cherchons un coefficient MULTIPLICATEUR. "$\times c'$"

<u>Méthode</u>: diviser par c revient à multiplier par l'inverse de c, or l'inverse de c est $\frac{1}{c}$. $c' = \frac{1}{c}$

Pour obtenir t', on applique la formule $c' = 1 + t'$

$c' - 1 = t'$ soit $\underline{\underline{t' = c' - 1}}$

__Exemple__ : Le prix d'une action a baissé de 13%, de combien doit augmenter l'action pour retrouver sa valeur initiale.

$$\begin{tikzcd}
y_1 \arrow[r, "-13\%"] \arrow[r, bend left=50, "\times 0{,}87"] & y_2 \arrow[l, shift left=2, "+14{,}94\%"] \arrow[l, bend left=50, "\div 0{,}87 \quad \times \frac{1}{0{,}87}"]
\end{tikzcd}$$

$$c = 1 + t$$
$$= 1 + \left(-\frac{13}{100}\right) = 1 - 0{,}13$$
$$= 0{,}87$$

$$c' = \frac{1}{0{,}87} = 1{,}1494$$

$$c' = 1 + t'$$
$$1{,}1494 = 1 + t'$$
$$1{,}1494 - 1 = t' \text{ soit } t' = 0{,}1494$$
$$= 14{,}94\%$$

L'évolution réciproque d'une baisse de 13% est une hausse de 14,94 %

4) Évolutions successives

Dans le cas d'évolutions successives, les taux d'évolution ne s'ajoutent pas

Exemple :

$$y_1 \xrightarrow{+10\%} y_2 \xrightarrow{+15\%} y_3$$

$$\xrightarrow{\quad +25\%\ ? \quad}$$

nous allons voir qu'augmenter successivement de 10% puis de 15% supplémentaires ne revient pas à augmenter de 25%

En effet :

$$\begin{tikzcd}
y_1 \arrow[r, "+10\%"] \arrow[r, bend left, "\times 1{,}1"] \arrow[rr, bend right, "\times 1{,}1 \times 1{,}15"'] & y_2 \arrow[r, "+15\%"] \arrow[r, bend left, "\times 1{,}15"] & y_3
\end{tikzcd}$$

coefficient multiplicateur global : C_G

$y_2 = y_1 \times 1{,}1$

$y_3 = y_2 \times 1{,}15$

$y_3 = y_1 \times 1{,}1 \times 1{,}15$

Méthode :

On multiplie entre eux les coefficients multiplicateurs pour obtenir le coefficient multiplicateur global C_G.

$C_G = 1{,}1 \times 1{,}15 = 1{,}265$

Méthode :

Pour calculer le taux global T_G correspondant, il suffit d'appliquer la formule $C_G = 1 + T_G$

ici on a : $1{,}265 = 1 + t_G$

$1{,}265 - 1 = t_G$

$0{,}265 = t_G$ soit $t_G = 26{,}5\,\%$