

## Interrogation écrite n° 1 : éléments de correction

### Exercice 1 :

8 points

1- Quelles sont les différentes façons de définir une suite ?

*De façon explicite ou par récurrence*

2- On considère la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $U_n = \sqrt{n} - 5$

a- Quel est le premier terme de la suite ? Donner sa valeur.

*Le premier terme est  $U_0 = \sqrt{0} - 5 = -5$*

b- Donner les 5 premiers termes de cette suite, avec leur valeur.

*$U_0 = \sqrt{0} - 5 = -5$  ;  $U_1 = \sqrt{1} - 5 = -4$  ;  $U_2 = \sqrt{2} - 5 \approx -3,6$  ;  $U_3 = \sqrt{3} - 5 \approx -3,3$  ;*

*$U_4 = \sqrt{4} - 5 = -3$*

c- Donner la valeur du 45<sup>ème</sup> terme.

*Le 45<sup>ème</sup> terme est le terme de rang 44 :  $U_{44} = \sqrt{44} - 5 = 2\sqrt{11} - 5$*

d- Quel est le terme de rang 76 ? Quelle est sa valeur ?

*Le terme de rang 76 est :  $U_{76} = \sqrt{76} - 5 = 2\sqrt{19} - 5$*

e- Représenter graphiquement les 5 premiers termes de la suite.

f- Quel est le sens de variation de  $(U_n)$  ? Justifier.

*Démontrons de  $(U_n)$  est strictement croissante :*

$$U_{n+1} - U_n = (\sqrt{n+1} - 5) - (\sqrt{n} - 5)$$

*Pour tout  $n$  entier naturel on a :  $= \sqrt{n+1} - 5 - \sqrt{n} + 5$*

$$= \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

*Or pour tout entier  $n$  :*

$$n+1 > n$$

*donc  $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$  car la fonction racine carrée est croissante, elle conserve l'ordre.*

*on a ainsi :  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 0$*

*Ce qui prouve que  $(U_n)$  est strictement croissante.*

3- On considère la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par 
$$\begin{cases} V_1 = 3 \\ V_{n+1} = \frac{V_n}{n} \end{cases}$$

a- Donner la valeur des 5 premiers termes de la suite.

$$V_1 = 3 ; V_2 = \frac{V_1}{1} = 3 ; V_3 = \frac{V_2}{2} = \frac{3}{2} ; V_4 = \frac{V_3}{3} = \frac{1}{2} ; V_5 = \frac{V_4}{4} = \frac{1}{8}$$

b- Représenter graphiquement les 5 premiers termes de la suite.

c- Conjecturer puis démontrer le sens de variation de la suite  $(V_n)$

*Démontrons de  $(V_n)$  est décroissante :*

$$V_{n+1} - V_n = \frac{V_n}{n} - V_n$$

*Pour tout  $n$  entier naturel on a :  $= \frac{V_n - nV_n}{n}$*

$$= \frac{V_n(1-n)}{n}$$

*Etudions le signe de  $(V_n)$  de façon logique : Au départ, le premier terme est positif, puis on obtient les termes suivants en divisant par une valeur  $n$  positive, donc chaque terme a le même signe que le suivant : par hérédité, le signe de  $V_n$  est positif, par hérédité.*

*$(1-n) < 0$ ;  $n > 0$ ;  $V_n > 0$  donc par règle des signes,  $V_{n+1} - V_n < 0$  : ce qui prouve que  $(V_n)$  est décroissante.*

## Exercice 2 :

5 points

La piscine municipale de Fontenay propose une formule d'abonnement annuel à 30€, ramenant le prix d'entrée à 2,70€ au lieu de 3,25€ en plein tarif. On désigne par  $n$  le nombre d'entrées annuelles et par  $U_n$  le prix moyen d'une entrée avec cette formule.

- a) Calculer  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$  puis exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$  pour tout entier  $n \geq 1$ .  
 $U_n$  est le prix moyen d'une entrée.

$$U_1 = 30 + 2,7 = 32,7\text{€} ; U_2 = \frac{30 + 2,7 \times 2}{2} = 17,7\text{€} ; U_3 = \frac{30 + 2,7 \times 3}{3} = 12,7\text{€} ;$$

$$U_n = \frac{30 + 2,7n}{n}$$

- d- Déterminer le sens de variation de la suite  $U$ .

*Démontrons de  $(U_n)$  est strictement décroissante (ce qui est logique, sinon aucun intérêt à souscrire un abonnement !!!!)*

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \frac{30 + 2,7(n+1)}{n+1} - \frac{30 + 2,7n}{n} \\ &= \frac{n[30 + 2,7(n+1)] - (n+1)(30 + 2,7n)}{n(n+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } n \text{ entier naturel on a : } &= \frac{30n + 2,7n(n+1) - 30(n+1) - 2,7n(n+1)}{n(n+1)} \\ &= \frac{30n - 30(n+1)}{n(n+1)} \\ &= \frac{30n - 30n - 30}{n(n+1)} = \frac{-30}{n(n+1)} < 0 \end{aligned}$$

*Ce qui prouve que la suite est décroissante.*

- b) Combien de fois par an au minimum faut-il se rendre à la piscine pour que le prix moyen d'une entrée avec abonnement soit plus avantageux qu'en plein tarif ?  
*L'abonnement devient avantageux dès que le prix moyen d'une entrée avec abonnement devient inférieur au prix d'une entrée sans abonnement soit :*

$$\frac{30 + 2,7n}{n} < 3,25$$

$$\Leftrightarrow 30 + 2,7n < 3,25n$$

$$\Leftrightarrow 30 < 3,25n - 2,7n$$

$$\Leftrightarrow 30 < 0,55n$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{30}{0,55}$$

$$\text{soit } n \geq 55$$

On peut aussi dresser un tableau de valeurs à la calculatrice ; c'est-à-dire éditer les termes successifs de la suite et regarder le rang du premier terme à partir duquel le prix moyen  $U_n$  devient inférieur à 3,25

## Exercice 3 :

3,5 points

Donner en le justifiant le tableau de signes de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = 3x^2 + 1 + 5x$$

*Méthode : On calcule le discriminant, les racines, puis on applique la propriété : « le trinôme est du signe de "a" à l'extérieur des racines »*

## Exercice 4 :

3,5 points

1. Recopier et compléter les phrases suivantes :

Augmenter de 9% revient à multiplier par ..... 1,09.

Diminuer de 8% revient à multiplier par ..... 0,92

2. « Un prix augmente de 9% puis baisse successivement de 8% ; il a donc augmenté de 1%. Il faudrait qu'il baisse de 1% pour revenir à sa valeur de départ. »

Que pensez-vous de cette affirmation ?

*Faux ! on n'ajoute pas les taux d'évolution, mais on multiplie les coefficients multiplicateurs. Le coefficient global après ces deux évolutions vaut  $1,09 \times 0,92 = 1,0028$  ce qui traduit une hausse de 0,28%. Pour revenir à la situation initiale, il faut diviser par 1,0028 ce qui revient à multiplier par l'inverse, soit 0,997 correspondant à une baisse de 0,3%.*