RÉPONSES P. 252

88. +++ **Nombre d'abonnés avec le tableur** TICE

Un journal, vendu exclusivement sur abonnement, possède 25 000 abonnés au début de l'année 2011.

Le service des abonnements estime que, d'une année sur l'autre, d'une part 80 % des lecteurs renouvellent leur abonnement et, d'autre part, qu'il y aura 20 000 nouveaux abonnés.

On note 0 l'année de référence 2011. Les années suivantes seront notées 1, 2…

On a construit sur tableur la feuille de calcul suivante.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Année n	0	1	2	3	4	5
2	Abonnés	25000	40000	52000	61600	69280	75424
3	$V(n)$	75000	60000	48000	38400	30720	24576
4	$V(n+1)/V(n)$		0,8	0,8	0,8	0,8	0,8

1. Quelle formule a-t-on entrée en C2 puis recopiée vers la droite pour compléter la ligne ?

2. On note u_n le nombre estimé d'abonnés durant l'année n.

La suite (u_n) est-elle géométrique ? Justifier la réponse.

3. La ligne 3 contient les premiers termes d'une suite (v_n) calculée à partir de la suite (u_n).

La cellule B3 contient la formule =100000-B2 qui a été recopiée vers la droite pour compléter la ligne. Quelle est l'expression de v_n en fonction de u_n ?

4. La cellule C4 contient la formule =C3/B3 qui a été recopiée vers la droite pour compléter la ligne.

En déduire la nature de la suite (v_n).

89. ++++ **Algorithme à trous** ALGO

On place un capital C, à intérêts composés, au taux annuel i, c'est-à-dire qu'après chaque année, le capital présent en début d'année est multiplié par $(1 + i)$.

1. Reproduire et compléter l'algorithme suivant, pour qu'il affiche la valeur du capital après n années de placement.

```
Saisir C
Saisir i
Saisir n
Pour k allant de ...... à ......
    C prend la valeur ..............
FinPour
Afficher C
```

2. a) On place $C = 10\,000$ € à intérêts composés au taux de 3 %. Quelle est la valeur du capital après deux années de placement ?

b) Vérifiez votre algorithme à l'aide de l'exemple précédent, en fournissant un tableau indiquant les valeurs successives des variables k et C.

90. +++ **Suite arithmétique, suite géométrique et tableur** TICE

Deux villes A et B ont décidé de lancer un programme ambitieux de construction de logements sociaux neufs.

En 2009, il y avait 3 460 logements sociaux dans la ville A et 2 740 dans la ville B.

Le projet de la ville A consiste en la construction à partir de 2010 de 160 logements sociaux supplémentaires chaque année. Celui de la ville B consiste à augmenter à partir de 2010 le nombre de logements sociaux de 7 % chaque année.

Pour comparer les deux projets, on utilise une feuille de calcul dont on donne un extrait ci-dessous. Les colonnes C et D sont au format nombre à zéro décimale.

	A	B	C	D
1	Année	Rang de l'année	Ville A	Ville B
2	2009	0	3 460	2 740
3	2010	1	3 620	2 932
4	2011	2	3 780	3 137
5	2012	3	3 940	3 357
6	2013	4	4 100	3 592
7	2014	5		
8	2015	6		
9	2016	7		
10	2017	8		
11	2018	9		
12	2019	10		

A. 1. Calculer le nombre de logements sociaux dans les villes A et B en 2014.

2. Donner des formules qui, entrées dans les cellules C3 et D3, permettent par recopie vers le bas d'obtenir la plage de cellule C3:D12.

3. Calculer le nombre de nouveaux logements sociaux qui seront construits dans la ville A durant la période 2009-2013.

B. 1. Pour tout entier naturel n, on note a_n le nombre total de logements sociaux dans la ville A au cours de l'année $2009 + n$. On a donc $a_0 = 3\,460$.

a) Donner la nature de la suite (a_n).

b) En 2019, le nombre de logements sociaux de la ville A aura-t-il doublé ? Justifier.

2. On considère la suite (b_n) telle que, pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = 1{,}07\ b_n$, avec $b_0 = 2\,740$.

Indiquer la nature de la suite (b_n).

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Durant les dix années de 2010 à 2019, le nombre de logements sociaux de la ville B dépassera-t-il celui de la ville A ? Justifier.

Les exercices 69, 70, 71, 73, 76 pourraient également figurer dans une évaluation.

CHAPITRE 3

Le second degré

L'ÉTUDE DU SECOND DEGRÉ PERMET DE RÉSOUDRE DE NOUVEAUX PROBLÈMES, CERTAINS ÉTANT ISSUS DE L'ÉCONOMIE (COÛTS, CHIFFRE D'AFFAIRES, OFFRE ET DEMANDE…).

CAPACITÉS

- Résoudre une équation ou une inéquation du second degré.
- Mobiliser les résultats sur le second degré dans le cadre de la résolution d'un problème.

ACTIVITÉ 1 À la recherche de paraboles

Parmi les courbes suivantes, lesquelles sont susceptibles de représenter une fonction polynôme du second degré ?

Dans chaque cas où une courbe ne convient pas, indiquer pourquoi.

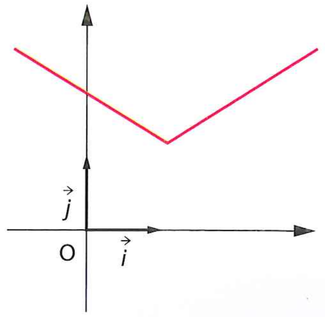


Figure 1

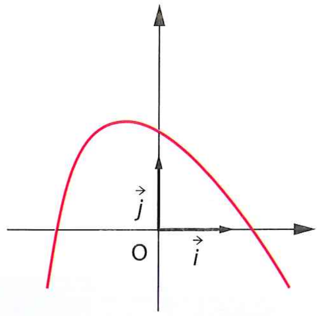


Figure 2

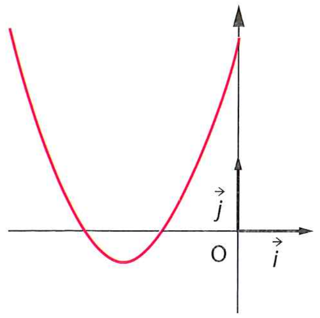


Figure 3

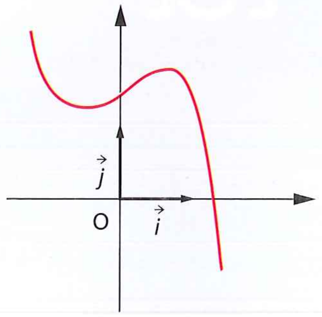


Figure 4

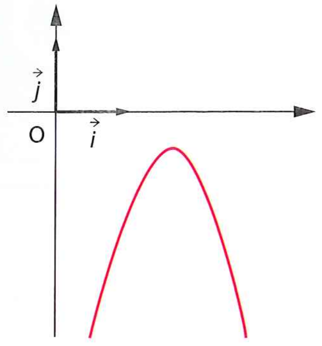


Figure 5

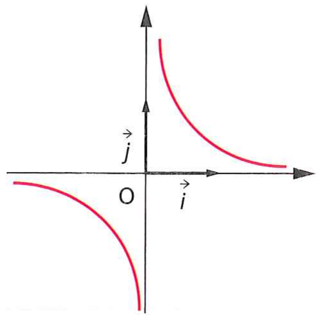


Figure 6

ACTIVITÉ 2 À la recherche de fonctions polynômes du second degré

Parmi les tableaux de variation suivants, lesquels sont susceptibles de correspondre à une fonction polynôme du second degré ?

Dans chaque cas où un tableau de variation ne convient pas, indiquer pourquoi.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		↗	-5	↘	

Tableau 1

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	‖	↘	

Tableau 2

x	-6		-3		4		6
$f(x)$		↘	0	↗	5	↘	

Tableau 3

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		↗	

Tableau 4

x	-3		1		5
$f(x)$	2	↘	0	↗	2

Tableau 5

x	-4		-1		3
$f(x)$	-1	↗	1	↘	-1

Tableau 6

ACTIVITÉ 3 Expérimenter le rôle des paramètres d'un trinôme du second degré avec GeoGebra

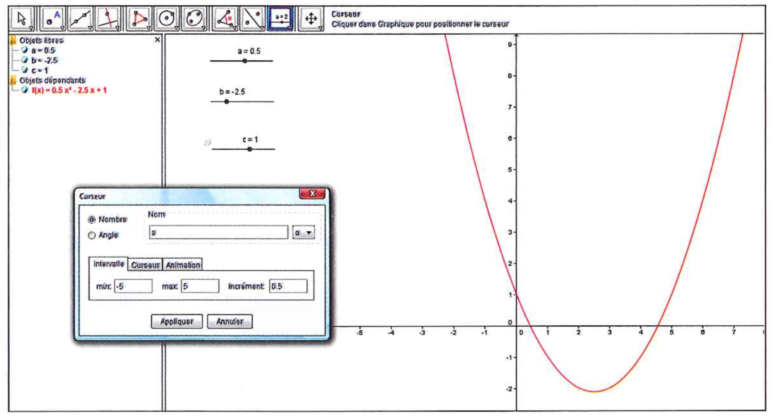
Aide vidéo

Pilotage de paraboles

On considère dans un repère la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des nombres réels, a non nul.

A. Le rôle de a, b et c

Avec GeoGebra, créer trois curseurs a, b et c allant de – 5 à 5 avec un incrément de 0,5, puis, dans la barre de saisie, entrer
$f(x) = a*x^2+b*x+c$.



Faire varier les coefficients a, b, et c pour répondre aux questions suivantes.

1° Quel est le coefficient dont la variation, lorsque les autres coefficients sont fixés, entraîne le déplacement vertical du sommet de la parabole ?

2° De quel coefficient le signe oriente-t-il la parabole « vers le haut » ou « vers le bas » ?

3° Quel est le coefficient dont la variation, lorsque les autres coefficients sont fixés, entraîne le déplacement de l'axe de symétrie de la parabole ?

B. Une règle pour détecter l'existence de racines

On désigne par « racine » du trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$, une solution de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$.

1° Où voit-on, sur le graphique, les racines du trinôme, lorsqu'il en existe ?

2° Combien peut-il exister de racines du trinôme $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$?

3° Entrer dans la barre de saisie, la formule $\Delta = b^2 - 4*a*c$. Cette expression se nomme « discriminant » et l'examen de son signe permet de connaître le nombre de racines du trinôme. En faisant varier les coefficients a, b, et c, conjecturer une règle donnant le nombre de racines selon le signe du discriminant.

C. Une règle pour connaître le signe du trinôme

1° Placer les curseurs sur $a = 1$, $b = 1$ et $c = -2$. Quel est le signe du trinôme entre les deux racines, c'est-à-dire lorsque $x \in [-2, 1]$? Quel est le signe du trinôme à l'extérieur des racines, c'est-à-dire lorsque $x \in]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$?

2° Placer les curseurs sur $a = -1$, $b = 1$ et $c = 2$. Quel est le signe du trinôme entre les deux racines ? Quel est le signe du trinôme à l'extérieur des racines ?

3° Placer les curseurs sur $a = -1$, $b = 1$ et $c = -1$. Quel est le signe du trinôme ?

4° En faisant varier les coefficients a, b, et c, conjecturer une règle donnant le signe du trinôme, selon le signe du discriminant et celui de a.

1 Fonction polynôme de degré deux

Vous avez étudié en Seconde des fonctions polynômes du second degré, comme la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$.

D'une manière générale vous avez observé les résultats suivants concernant les variations et la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont des coefficients réels avec $a \neq 0$, en distinguant deux cas.

Le chapitre 4 sur la dérivation nous fournira une méthode pour obtenir les tableaux de variation.
Conformément au programme, c'est dans ce chapitre que nous étudierons des fonctions polynômes de degré deux.

Un **extremum** est un maximum ou un minimum.

$a > 0$	$a < 0$
f est **décroissante** sur $\left]-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ et **croissante** sur $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right[$.	f est **croissante** sur $\left]-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ et **décroissante** sur $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right[$.

Tableau pour $a > 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
Variations de f	↘	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	↗

Tableau pour $a < 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
Variations de f	↗	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	↘

f admet un **minimum** pour $x = -\frac{b}{2a}$; ce minimum est égal à $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac-b^2}{4a}$.

f admet un **maximum** pour $x = -\frac{b}{2a}$; ce maximum est égal à $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac-b^2}{4a}$.

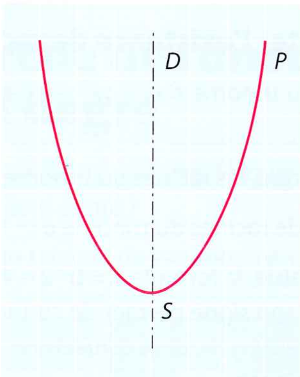


Figure 7

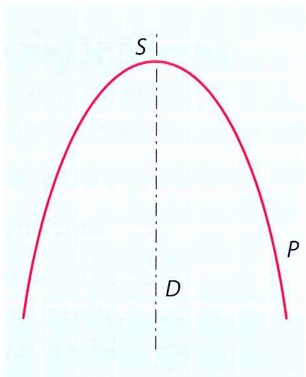


Figure 8

La courbe représentative est une **parabole** P de **sommet** S.

S a pour abscisse $-\frac{b}{2a}$ et pour ordonnée $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

La parabole a pour **axe de symétrie** la droite D d'équation $x = -\frac{b}{2a}$.

2 Résolution d'une équation du second degré

Nous savons déjà résoudre certaines équations du second degré très particulières :

- $x^2 + 1 = 0$ peut s'écrire $x^2 = -1$ et n'a donc pas de solution.
- $(x - 4)(x + 3) = 0$ est une équation du second degré écrite sous forme de produit ; elle a deux solutions : 4 et -3.
- $x^2 - 2x + 1 = 0$ peut s'écrire $(x - 1)^2 = 0$ et a donc 1 pour seule solution.

Un produit de facteurs est nul si…

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; ici $a = x$ et $b = 1$.

Il s'agit maintenant d'apprendre à résoudre n'importe quelle équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b et c sont fixés avec $a \neq 0$.

A. Équation $x^2 - 2x + 2 = 0$

Cette équation ressemble à $x^2 - 2x + 1 = 0$ que nous venons de résoudre.

Pour tout nombre réel x,
$x^2 - 2x + 2 = (x^2 - 2x + 1) + 1$,
$x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1$.

Observez que $x^2 - 2x$ est le début du développement de $(x - 1)^2$.

L'équation $x^2 - 2x + 2 = 0$ est donc équivalente à $(x - 1)^2 + 1 = 0$ qui n'a pas de solution car un carré est positif.

Conclusion : l'équation $x^2 - 2x + 2 = 0$ n'a pas de solution dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

B. Équation $2x^2 + 4x - 3 = 0$

Pour transformer de la même façon $2x^2 + 4x - 3$, on commence par mettre en facteur le coefficient 2 du terme en x^2.

Pour tout nombre réel x,

$$2x^2 + 4x - 3 = 2\left(x^2 + 2x - \frac{3}{2}\right),$$

$$2x^2 + 4x - 3 = 2\left[(x+1)^2 - 1 - \frac{3}{2}\right],$$

$$2x^2 + 4x - 3 = 2\left[(x+1)^2 - \frac{5}{2}\right],$$

$$2x^2 + 4x - 3 = 2\left[(x+1)^2 - \left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2\right],$$

$$2x^2 + 4x - 3 = 2\left(x + 1 + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)\left(x + 1 - \sqrt{\frac{5}{2}}\right).$$

$x^2 + 2x$ est le début du développement de $(x + 1)^2$.
$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$.

$(x+1)^2 - \frac{5}{2}$ est de la forme $A^2 - B^2$ où $A = x + 1$ et $B = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$.

On a ainsi factorisé $2x^2 + 4x - 3$ sous forme d'un produit de deux polynômes du premier degré.

L'équation $2x^2 + 4x - 3 = 0$ est équivalente à :

$$x + 1 + \sqrt{\frac{5}{2}} = 0 \quad \text{ou} \quad x + 1 - \sqrt{\frac{5}{2}} = 0.$$

Conclusion : l'équation $2x^2 + 4x - 3 = 0$ a deux solutions dans $\mathbb{R}$:

$$-1 - \sqrt{\frac{5}{2}} \quad \text{et} \quad -1 + \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

C. Équation $ax^2+bx+c=0$ où $a\neq 0$

Posons $f(x)=ax^2+bx+c$.

On procède comme dans l'exemple ci-dessus.

Pour tout nombre réel x,

$f(x)=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]$,

$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$ en considérant que $x^2+\frac{b}{a}x$ est le début du développement de $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$, $f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ en regroupant les termes constants.

Dans le crochet, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ est un carré, donc positif, et $4a^2>0$; en revanche, le signe de b^2-4ac dépend de la valeur des coefficients a, b, c de l'équation.

On est ainsi amené à donner un nom à b^2-4ac.

Ainsi, suivant le signe de b^2-4ac, l'expression dans le crochet de $f(x)$ est de forme A^2-B^2 comme dans l'exemple du **B.** ou est strictement positive comme dans l'exemple du **A.**.

Δ est la lettre « delta » majuscule de l'alphabet grec.

DÉFINITION

$\Delta=b^2-4ac$ est le **discriminant** de ax^2+bx+c.

Pour tout nombre réel x, $f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$.

1er cas : $\Delta>0$

$\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$.

$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]$, qui est de la forme $a(A^2-B^2)$;

$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$.

L'équation $ax^2+bx+c=0$ est équivalente à :

$x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}=0$ ou $x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}=0$.

Conclusion : si $\Delta>0$, alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ a deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$:

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

On a alors la factorisation : $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

2e cas : $\Delta=0$

En remplaçant Δ par 0 dans l'expression de $f(x)$ écrite sous la définition, on obtient :

$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$.

Cette solution est dite « double ».

Conclusion : si $\Delta=0$, alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ a une solution unique dans $\mathbb{R}$: $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$.

On a alors la factorisation : $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$.

3e cas : $\Delta<0$

Pour tout nombre réel x, $f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$.

Alors $-\frac{\Delta}{4a^2}>0$ donc, pour tout nombre réel x, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}>0$.

Donc pour tout nombre réel x, $f(x)\neq 0$.

Conclusion : si $\Delta<0$, alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Dans ce cas, on n'a pas de factorisation pour ax^2+bx+c.

ax^2+bx+c, qui est une somme de trois termes, est appelé trinôme (du second degré).

Remarque

La résolution d'une équation du second degré peut être effectuée à la main ou en utilisant un ordinateur ou une calculatrice. L'algorithme de résolution comporte une instruction « conditionnelle » qui permet de distinguer les réponses suivant la valeur du discriminant Δ : voir le **TP3**.

EXERCICE résolu 1 — Résoudre une équation du second degré

ÉNONCÉ

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1° $5x^2-37x+54=0$.

2° $2x^2+5x+\frac{25}{8}=0$.

3° $x^2+10x+39=0$.

MÉTHODE / **SOLUTION**

Calculer le discriminant $\Delta=b^2-4ac$.

1° $\Delta=b^2-4ac$, $\Delta=(-37)^2-(4\times5\times54)$, $\Delta=289$, $\Delta=17^2$.

L'équation a deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{37-17}{10}=2$ et $x_2=\frac{37+17}{10}=\frac{27}{5}$; $\mathcal{S}=\left\{2,\frac{27}{5}\right\}$.

Remarque

$\mathcal{S}$ est l'ensemble des solutions de l'équation.

Exploiter la ligne du tableau suivant correspondant à la valeur de Δ.

	Équation $ax^2+bx+c=0$
$\Delta>0$	deux solutions distinctes $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta=0$	une solution double $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$
$\Delta<0$	pas de solution

2° $\Delta=b^2-4ac$, $\Delta=25-4\times2\times\frac{25}{8}$, $\Delta=0$.

L'équation a une solution double :

$-\frac{b}{2a}=\frac{-5}{4}$; $\mathcal{S}=\left\{\frac{-5}{4}\right\}$.

3° $\Delta=b^2-4ac$, $\Delta=100-156$, $\Delta=-56$.

$\Delta<0$; l'équation n'admet pas de solution. $\mathcal{S}=\varnothing$.

Remarque

$\varnothing$ est « l'ensemble vide ».

VOIR AUSSI L'EXERCICE CORRIGÉ 15

EXERCICE résolu 2 Factoriser un trinôme

ÉNONCÉ

Factoriser le trinôme :
$f(x) = 5x^2 - 37x + 54$.

MÉTHODE

Calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Exploiter la ligne du tableau suivant correspondant à la valeur de Δ.

	Factorisation de $f(x) = ax^2 + bx + c$
$\Delta > 0$	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
$\Delta = 0$	$f(x) = a(x - x_1)^2$
$\Delta < 0$	Pas de factorisation

SOLUTION

On a démontré au 1° de l'exercice résolu 1 que l'équation $5x^2 - 37x + 54 = 0$ a deux solutions distinctes : 2 et $\frac{27}{5}$.

On peut écrire : $5x^2 - 37x + 54 = 5(x - 2)\left(x - \frac{27}{5}\right)$,

ou : $5x^2 - 37x + 54 = (x - 2)(5x - 27)$.

Remarque

Les *solutions* de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ sont les *racines* du trinôme $ax^2 + bx + c$.

VOIR AUSSI L'EXERCICE CORRIGÉ 15

D. Interprétation graphique

La figure ci-dessous correspond au cas $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$ étudié au paragraphe B.

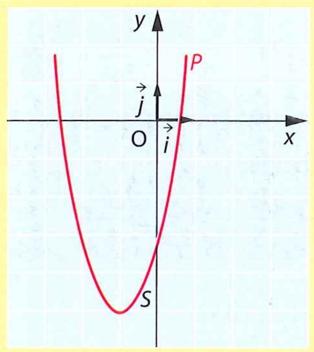


Figure 10

Nous avons rappelé dans la partie 1 que la représentation graphique d'une fonction polynôme f du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ est une parabole P. Cette courbe possède un axe de symétrie passant par son sommet S, celui-ci correspondant à un minimum si $a > 0$ et à un maximum si $a < 0$.

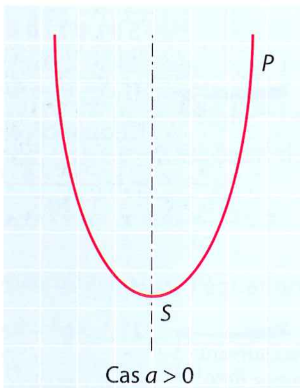


Figure 11

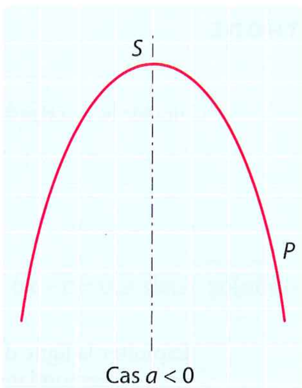


Figure 12

Constatez-le sur la figure ci-dessus :

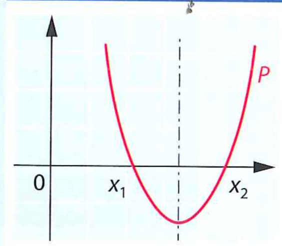
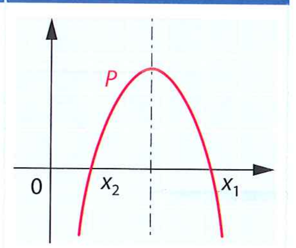
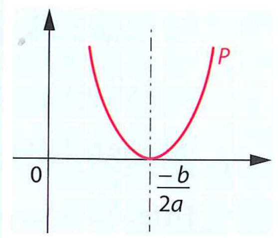
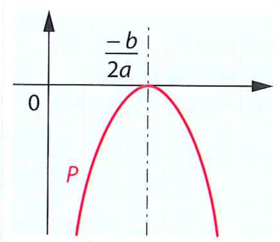
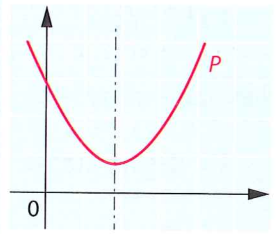
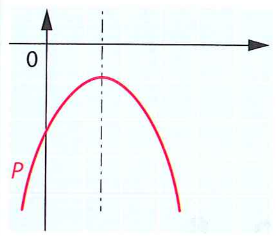
$x' = -1 - \sqrt{\frac{5}{2}} \approx -2{,}58$.

$x'' = -1 + \sqrt{\frac{5}{2}} \approx 0{,}58$.

La lecture graphique limite la précision sur ces abscisses.

Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont, si elles existent, les abscisses x des points où la parabole P d'équation $y = ax^2 + bx + c$ coupe l'axe des abscisses d'équation $y = 0$.

D'une manière générale, chaque cas particulier observé correspond à l'un des six cas suivants :

	$a > 0$	$a < 0$
Cas $\Delta > 0$: P coupe l'axe des abscisses en deux points distincts d'abscisses respectives : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.	 Figure 13	 Figure 14
Cas $\Delta = 0$: P est tangente à l'axe des abscisses au point d'abscisse $\frac{-b}{2a}$.	 Figure 15	 Figure 16
Cas $\Delta < 0$: P ne coupe pas l'axe des abscisses.	 Figure 17	 Figure 18

3 Signe du trinôme

A. Signe de $x^2 - 2x + 2$

Nous avons démontré au paragraphe 2A. que, pour tout nombre réel x, $\quad x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 > 0$.

Ce résultat s'interprète *graphiquement* : les points de la parabole d'équation $y = x^2 - 2x + 2$ ont tous une ordonnée positive ; ils sont donc situés *au-dessus* de l'axe des abscisses.

La parabole obtenue est du type de celle de la figure 17 car $\Delta < 0$ et $a > 0$; les coordonnées de son sommet sont $(-1, 1)$.

B. Signe de $2x^2 + 4x - 3$

Nous avons démontré au paragraphe 2B. que,

pour tout nombre réel x, $\quad 2x^2 + 4x - 3 = 2\left(x + 1 + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)\left(x + 1 - \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$.

Le tableau suivant donne le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{\frac{5}{2}}\approx -2{,}58$		$-1+\sqrt{\frac{5}{2}}\approx 0{,}58$		$+\infty$
$x+1+\sqrt{\frac{5}{2}}$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1-\sqrt{\frac{5}{2}}$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Observez la figure 10 qui est un cas particulier de la figure 13 car $\Delta > 0$ et $a > 0$.

Ce résultat s'interprète *graphiquement* : les points de la parabole d'équation $y = 2x^2 + 4x - 3$ dont l'abscisse est inférieure à $-1-\sqrt{\frac{5}{2}}$ ou supérieure à $-1+\sqrt{\frac{5}{2}}$ ont une ordonnée positive ; ils sont donc situés *au-dessus* de l'axe des abscisses.

En revanche, les points de la parabole dont l'abscisse est comprise entre $-1-\sqrt{\frac{5}{2}}$ et $-1+\sqrt{\frac{5}{2}}$ sont situés *en dessous* de l'axe des abscisses car leur ordonnée est négative.

C. Signe de $ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$

Dans chacun des trois cas suivants, nous reprenons un résultat démontré au paragraphe **2C.**.

1er cas : $\Delta < 0$

Dans l'exemple du paragraphe A, $a = 1$.

Pour tout nombre réel x,

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

Le crochet contient un nombre strictement positif.

Observez les figures 17 et 18.

Donc, pour tout x réel, $ax^2 + bx + c$ a le signe du coefficient a.

2e cas : $\Delta = 0$

Pour tout nombre réel x,

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Un carré est positif.
Observez les figures 15 et 16.

Donc $ax^2 + bx + c$ a le signe du coefficient a, sauf pour $x = -\frac{b}{2a}$ où il s'annule.

3e cas : $\Delta > 0$

Pour tout nombre réel x,
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$,
où x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Si $x_2 < x_1$ permuter x_1 et x_2 dans le tableau.

Observez les figures 13 et 14.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x - x_1)(x - x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

THÉORÈME

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$.

si $\Delta < 0$, $f(x)$ est du signe de a pour tout x réel.

Si $\Delta = 0$, $f(x)$ est du signe de a pour tout x réel différent de $-\frac{b}{2a}$.

Si $\Delta > 0$, soit x_1 et x_2, où $x_1 < x_2$, les racines du polynôme $f(x)$.

$f(x)$ est du signe de a pour tout x de $]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$.

$f(x)$ est du signe de $-a$ pour tout x de $]x_1, x_2[$.

Dans ce cas, on peut retenir que $f(x)$ est du signe de a « à l'extérieur des racines ».

Ce théorème permet notamment de résoudre des inéquations dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE résolu 3 Résoudre une inéquation du second degré

ÉNONCÉ

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

1° $2x^2 + x - 15 \leq 0$.

2° $-2x^2 + 2x - \frac{1}{2} \geq 0$.

3° $x^2 + x + 2 > 0$.

MÉTHODE

Calculer le discriminant Δ du trinôme $f(x)$.

Appliquer le théorème ci-dessus.

SOLUTION

1° Les solutions de l'équation $2x^2 + x - 15 = 0$ sont -3 et $\frac{5}{2}$ et le coefficient a, égal à 2, est positif.

Le signe du trinôme, lorsque x varie dans $\mathbb{R}$, est donné par le tableau :

x	$-\infty$		-3		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$2x^2 + x - 15$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $\mathcal{S} = \left[-3, \frac{5}{2}\right]$.

2° $\Delta = 0$, la solution double est $-\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$ et le coefficient $a = -2$ est négatif.

Donc, pour tout x de $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$, $-2x^2 + 2x - \frac{1}{2}$ est strictement négatif.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

3° $\Delta = -7$ est négatif et le coefficient $a = 1$ est positif.

Donc pour tout x réel, $x^2 + x + 2$ est strictement positif.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

VOIR AUSSI L'EXERCICE CORRIGÉ 22

Ce qu'il faut savoir

Le second degré

Animation vidéo

- $f(x)=ax^2+bx+c$ où $a\neq 0$.
- $\Delta=b^2-4ac$ est le discriminant de ax^2+bx+c.

	Équation $f(x)=0$	Factorisation	Signe
$\Delta>0$	Deux solutions distinctes : $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$	x : $-\infty$; x_1 ; x_2 ; $+\infty$ — $f(x)$: signe de a ; 0 ; signe de $-a$; 0 ; signe de a. Si $x_2<x_1$, permuter x_1 et x_2.
$\Delta=0$	Une solution double : $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	$f(x)=a(x-x_1)^2$	x : $-\infty$; x_1 ; $+\infty$ — $f(x)$: signe de a ; 0 ; signe de a
$\Delta<0$	pas de solution	pas de factorisation	x : $-\infty$; $+\infty$ — $f(x)$: signe de a

Quelques mots d'histoire

Les documents mathématiques les plus anciens dont on a connaissance datent d'environ 1800 à 1500 avant Jésus-Christ : il s'agit de tablettes d'argile de la civilisation babylonienne et de papyrus d'Égypte. Ils comportent des calculs et des **résolutions de problèmes** le plus souvent liés à la vie économique, mais on est encore très loin des notations actuellement utilisées en mathématiques. Pourtant certains exemples d'**équations du second degré** sont résolus avec des nombres écrits en base soixante.
Les nombres ont mis très longtemps à se dégager d'un contexte concret, en particulier géométrique.
Ce n'est qu'au IXe siècle, avec l'essor des mathématiques arabes, que l'algèbre prend de l'importance : on étudie des problèmes généraux et les nombres sont représentés à l'aide de chiffres « arabes », dont l'origine géographique est en réalité l'Inde, en utilisant la numération décimale avec écriture positionnelle et usage du zéro.
Mais il faut attendre la fin du XVIe siècle pour que Viète désigne par des lettres, des nombres connus ou inconnus. Un peu plus tard, Harriot introduit le signe = dont l'usage se généralisera progressivement avec Leibniz et Newton, vers 1700.
Descartes transforme l'algèbre en une branche fondamentale des mathématiques et ses travaux sur les équations dites algébriques trouveront une conclusion, un peu moins de deux siècles plus tard avec Abel et Galois, après les apports de d'Alembert en 1749, de Laplace en 1795 et surtout de Gauss en 1799.


René Descartes 1596-1650


Jean le Rond d'Alembert 1717-1783


Pierre-Simon de Laplace 1749-1827


Carl Friedrich Gauss 1777-1855


Évariste Galois 1811-1832

RÉPONSES P. 253

TP 1 Utiliser un tableur pour étudier une fonction polynôme de degré 2

Bénéfice d'une entreprise

Une entreprise fabrique des ordinateurs haut de gamme. Pour des raisons de matériel et de personnel, l'entreprise ne peut pas fabriquer plus de 35 ordinateurs par mois. On suppose que l'entreprise parvient à vendre toute sa production.

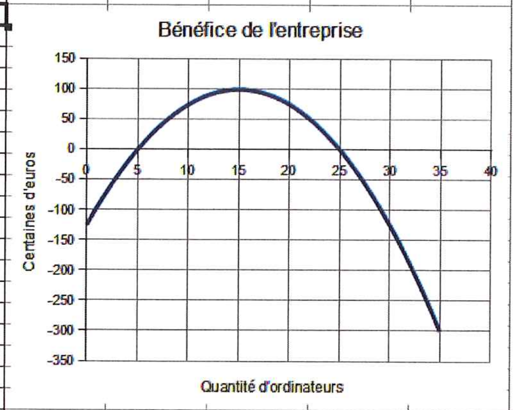
Pour x ordinateurs fabriqués et vendus, la recette r totale et le coût c de production sont donnés, en centaines d'euros, par les fonctions r et c définies sur $[0, 35]$ par :

$$r(x)=35x \text{ et } c(x)=x^2+5x+125\,.$$

On souhaite construire sur un tableur la feuille de calcul ci-dessous.

E2 =B2-C2

	A	B	C	D	E
1	Quantité	Recettes	Coût	Coût unitaire	Bénéfice
2	0	0	125	#DIV/0 !	-125
3	1	35	131	131,00	-96
4	2	70	139	69,50	-69
5	3	105	149	49,67	-44
6	4	140	161	40,25	-21
7	5	175	175	35,00	0
8	6	210	191	31,83	19
9	7	245	209	29,86	36
10	8	280	229	28,63	51
11	9	315	251	27,89	64
12	10	350	275	27,50	75
13	11	385	301	27,36	84
14	12	420	329	27,42	91
15	13	455	359	27,62	96
16	14	490	391	27,93	99
17	15	525	425	28,33	100
18	16	560	461	28,81	99
19	17	595	499	29,35	96
20	18	630	539	29,94	91
21	19	665	581	30,58	84



Créer la colonne A, avec les quantités de 0 à 35.

1. Quelles sont les formules qui, entrées en B2 et C2, peuvent être recopiées vers le bas ?
Compléter les colonnes B et C calculant les recettes et le coût pour chaque quantité.

2. a. Entrer en cellule D2 la formule =C2/A2. Expliquer l'affichage du tableur dans cette cellule.

b. Recopier la formule entrée en D2 vers le bas en colonne D. Que signifie l'expression « coût unitaire » ?

3. Montrer que la fonction B, donnant le bénéfice en centaines d'euros selon la quantité x d'ordinateurs fabriqués et vendus, est définie sur $[0, 35]$ par $B(x)=-x^2+30x-125$.

4. a. Représenter la fonction B sur le tableur. D'après ce graphique, pour quelle valeur de x l'entreprise réalisera-t-elle le bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice ?

b. Vérifier la réponse à la question précédente à l'aide de la feuille de calcul.

c. Que pensez-vous de l'affirmation suivante : « pour que le bénéfice soit maximal, il suffit que le coût unitaire soit le plus bas possible » ?

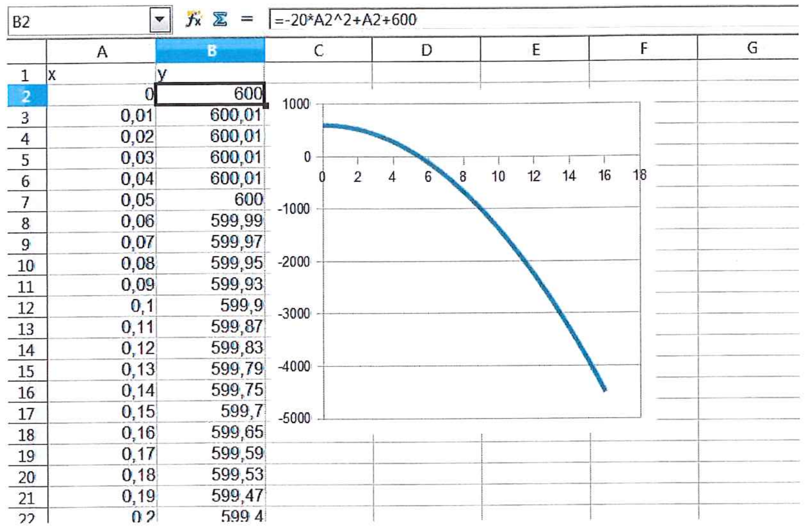
Fiche technique tableur

Tabuler et représenter une fonction

On souhaite tabuler et représenter la fonction f définie sur [0, 15] par $f(x) = -20x^2 + x + 600$.

Tabuler f

On suppose que les abscisses x sont entrées en colonne A et que les ordonnées $y = f(x)$ sont calculées en colonne B.



	A	B
1	x	y
2	0	600
3	0,01	600,01
4	0,02	600,01
5	0,03	600,01
6	0,04	600,01
7	0,05	600
8	0,06	599,99
9	0,07	599,97
10	0,08	599,95
11	0,09	599,93
12	0,1	599,9
13	0,11	599,87
14	0,12	599,83
15	0,13	599,79
16	0,14	599,75
17	0,15	599,7
18	0,16	599,65
19	0,17	599,59
20	0,18	599,53
21	0,19	599,47
22	0,2	599,4

En A2 on entre la valeur minimale de x (ici 0).

En A3 on entre la **formule** =A2+0,01 si on désire un pas de 0,01 (on peut aussi entrer en A3 la valeur 0,01, sélectionner les cellules A2 et A3 puis recopier vers le bas).

En B2 on entre l'expression correspondant à $f(x)$ où x est remplacé par A2. Ici, on a entré en B2 la **formule** =-20*A2^2+A2+600 .

On **recopie vers le bas** la cellule B2 en B3. On **sélectionne** les cellules A3 et B3 puis on **recopie vers le bas** aussi loin qu'il le faut pour atteindre la valeur maximale de x souhaitée (ici 15).

Représenter f

On suppose que la fonction est tabulée dans les colonnes A et B.

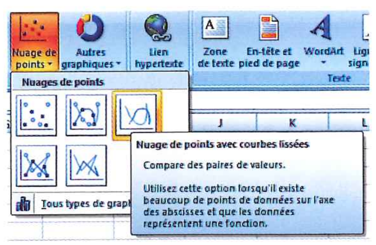
Sélectionner les valeurs des colonnes A et B.

– Avec **Excel 2003** :

Cliquer sur l'icône d'**Assistant graphique** puis choisir **Type de Graphique/Nuage de points avec lissage sans marquage des données.**

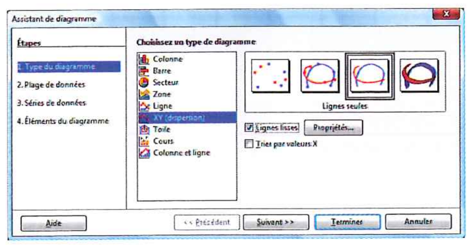
– Avec **Excel 2007** :

Dans l'onglet **Insertion** choisir **Nuage de points/Nuages de points avec courbes lissées.**



– Avec **OpenOffice Calc** :

Cliquer sur l'icône **Diagramme**, puis à l'étape 1, choisir **XY (dispersion)** puis **Lignes seules** et cocher **Lignes lisses**.



On peut modifier certains éléments du graphique par des clics droits sur les éléments à modifier (légende, échelle des axes, quadrillage…).

TP 2 Exploiter les résultats fournis par un logiciel de calcul formel

LOGICIEL UTILISÉ

Image d'écran d'un logiciel de calcul formel

Bénéfice et calcul formel

Le responsable d'un laboratoire pharmaceutique estime que, pour fabriquer x hectolitres d'un certain produit, x étant compris entre 1 et 30, le coût total en milliers d'euros est :

$$c(x) = 1{,}4x^2 + 2x + 175.$$

On suppose que toute la production est vendue et que la recette en milliers d'euros réalisée par la vente de x hectolitres de ce produit est : $r(x) = 44x$.

Certains calculs, que l'on pourra utiliser, ont été menés à l'aide d'un logiciel de calcul formel dont l'image d'écran figure ci-dessous.

```
Fichier  Editer  Cell  Maxima  Equations  Algèbre  Calculs  Simplifier  Tracé de courbes

(%i1) define(c(x),1.4*x^2+2*x+175);
(%o1) c(x):=1.4 x^2+2 x+175

(%i2) define(r(x),44*x);
(%o2) r(x):=44 x

(%i3) expand(r(x)-c(x));
(%o3) -1.4 x^2+42 x-175

(%i4) solve(r(x)-c(x)=0);
rat: replaced -1.4 by -7/5 = -1.4
(%o4) [x=25,x=5]

(%i5) r(15)-c(15);
(%o5) 140.0

(%i6) solve(r(x)-c(x)-15=0);
rat: replaced -1.4 by -7/5 = -1.4
(%o6) [x=-(25 sqrt(7)-105)/7, x=(25 sqrt(7)+105)/7]

(%i7) float(%), numer;
(%o7) [x=5.550888174769319,x=24.44911182523068]
```

1. Donner une expression du bénéfice ou de la perte réalisé par le laboratoire, en fonction de la quantité produite et vendue.

2. Pour quelles quantités produites le bénéfice est-il nul ?

3. Donner l'intervalle de production pour lequel le laboratoire réalise un bénéfice. Justifier qu'il s'agit bien d'un bénéfice.

4. Pour quelle quantité produite le laboratoire réalise-t-il le bénéfice maximal (justifier la réponse) ? Quel est ce bénéfice maximal ?

5. Pour financer un équipement nécessaire à la dépollution, le laboratoire doit investir 15 000 €. Reprendre les questions **3.** et **4.** en considérant cette nouvelle donnée.

TP 3 Tester puis modifier un algorithme

LOGICIEL UTILISÉ
Calculatrice ou tableur

Résolution de l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$

1. Écrire le programme ci-dessous à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur.

Texas Instruments

```
PROGRAM:DEGRE2
:Input "A=",A
:Input "B=",B
:Input "C=",C
:If A=0
:Then
:Disp "NON DEGRE
2"
:Else
:B^2-4*A*C→D
:If D<0
:Then
:Disp "PAS DE RA
CINE"
:Else
:(-B-√(D))/(2*A)
→R
:(-B+√(D))/(2*A)
→S
:Disp "X1=",R
:Disp "X2=",S
:End
:End
```

Excel Visual Basic

```
Sub Degre2()
a = Application.InputBox("Entrer a", Type:=1)
b = Application.InputBox("Entrer b", Type:=1)
c = Application.InputBox("Entrer c", Type:=1)
If a = 0 Then
MsgBox ("Non degré 2")
Else
d = b ^ 2 - 4 * a * c
If d < 0 Then
MsgBox ("Pas de racine")
Else
x1 = (-b - Sqr(d)) / (2 * a)
x2 = (-b + Sqr(d)) / (2 * a)
MsgBox ("La solution x1 vaut" & x1)
MsgBox ("La solution x2 vaut" & x2)
End If
End If
End Sub
```

Casio

```
======DEGRE2 ======
"A=":?→A↵
"B=":?→B↵
"C=":?→C↵
If A=0↵
Then ↵
"NON DEGRE 2"↵
TOP BTM SRC MENU A⇔a CHAR
```

```
======DEGRE2 ======
Else ↵
B^2-4×A×C→D↵
If D<0↵
Then ↵
"PAS DE RACINE"↵
Else ↵
TOP BTM SRC MENU A⇔a CHAR
```

```
======DEGRE2 ======
(-B-√(D))÷(2×A)→R↵
(-B+√(D))÷(2×A)→S↵
"X1=":R◢
"X2=":S↵
IfEnd↵
IfEnd
TOP BTM SRC MENU A⇔a CHAR
```

OpenOffice Calc Basic

```
REM  *****  BASIC  *****

Sub Main
a=CDbl(InputBox("Entrer a"))
b=CDbl(InputBox("Entrer b"))
c=CDbl(InputBox("Entrer c"))
If a=0 Then
MsgBox("Non degré 2")
Else
d=b^2-4*a*c
If d<0 Then
MsgBox("Pas de racine")
Else
x1=(-b-sqr(d))/(2*a)
x2=(-b+sqr(d))/(2*a)
MsgBox("La solution x1 vaut  "&x1)
MsgBox("La solution x2 vaut  "&x2)
End If
End If
End Sub
```

2. Tester le programme obtenu à l'aide des équations suivantes :

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \,;\, 5x^2 - 7x + 2 = 0 \,;\, 6x^2 + 4x + 5 = 0 \,;\, 3x + 2 = 0.$$

(Effectuer au préalable les calculs « à la main ».)

3. Modifier le programme de façon à :
– afficher la valeur du discriminant ;
– distinguer le cas où il est nul ;
– afficher, selon les cas, « racine double » ou « deux racines réelles » ainsi que la ou les valeurs correspondantes.

Algorithmique

Instruction conditionnelle « Si… alors… sinon… »

Structure

L'instruction conditionnelle « **Si**… **alors**… **sinon** » permet dans un programme d'effectuer un *traitement* ou un autre, selon qu'une *condition* est vraie ou fausse.

Si *condition* **alors**
    traitement 1
  sinon
    traitement 2
FinSi

Syntaxe

Texas Instruments	Casio	Excel Visual Basic	OpenOffice Calc Basic

:If *condition*
:Then
:*traitement 1*
:Else
:*traitement 2*
:End
	If *condition* ↵
	Then ↵
	traitement 1 ↵
	Else ↵
	traitement 2 ↵
	IfEnd
		If condition Then
		traitement 1
		Else
		traitement 2
		End If
			If condition Then
			traitement 1
			Else
			traitement 2
			End If

Exemple

Afficher « PILE » si le générateur de nombres aléatoires fournit un nombre inférieur ou égal à 0,5 et « FACE » sinon.

Texas Instruments

```
PROGRAM:PILEFACE
:If NbrAléat≤0.5
:Then
:Disp "PILE"
:Else
:Disp "FACE"
:End
```

Excel Visual Basic

```
(Général)    PileFace
Sub PileFace()
Randomize
If Rnd <= 0.5 Then
MsgBox ("Pile")
Else
MsgBox ("Face")
End If
End Sub
```

Casio

```
======PILEFACE======
If Ran# ≤0.5↵
Then ↵
"PILE"↵
Else ↵
"FACE"↵
IfEnd
TOP BTM SRC MENU A⇔a CHAR
```

OpenOffice Calc Basic

```
REM  *****  BASIC  *****

Sub Main
Randomize
If Rnd <= 0.5 Then
MsgBox("PILE")
Else
MsgBox("FACE")
End If
End Sub
```

```
soffice
FACE
OK
```

TP 4 Résoudre un problème de degré 2 à l'aide du tableur et de l'algèbre

Ce TP permet d'évaluer des capacités mathématiques développées grâce aux TICE.

LOGICIEL UTILISÉ
Tableur

Le juste prix

Dans une grande surface, on a remarqué que si un article est vendu 19 € pièce, la demande journalière est de 500 articles, et que chaque baisse de prix de 1 € de cet article amène 80 demandes supplémentaires.

1. Résolution à l'aide du tableur

a. Programmer à l'aide du tableur la recette journalière correspondant à cet article, selon le prix auquel il est vendu, en nombre entier d'euros entre 19 € et 0 €.

b. Quel prix assure une recette journalière maximale ?

Appelez le professeur pour présenter votre démarche et votre réponse.

2. Résolution algébrique

a. On note $19 - x$ le prix de vente d'un article, avec x entier compris entre 0 et 19, correspondant à la baisse de prix effectuée.

Montrer que la recette vaut : $(19 - x) \times (500 + 80x)$.

b. Développer l'expression précédente et en déduire la valeur de x pour laquelle elle est maximale.

c. Comparer avec le résultat obtenu à l'aide du tableur.

Exercices

CE QU'IL FAUT SAVOIR FAIRE	Exercices corrigés	Exercices non corrigés
Consolider les acquis	3, 5, 9, 10	1, 2, 4, 6, 7, 8, 11
Résoudre des équations du second degré sans les formules	12	13, 14
Utiliser les formules pour résoudre des équations du second degré	15	16 à 20
Faire le lien avec les représentations graphiques	29, 34	30 à 33 55 à 58
Étudier le signe d'un trinôme ; résoudre une inéquation ; interpréter graphiquement une équation, une inéquation	21, 22	23 à 28
Mobiliser les résultats sur le second degré dans le cadre de la résolution d'un problème	36, 46	35, 37 à 45, 47 à 50
Consolider les acquis sur la résolution des systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues	51	52 à 54
TICE Utiliser une calculatrice, un tableur		75
ALGO Utiliser un algorithme	58, 59 ,60	

Développement

1. + Développer chacune des expressions suivantes et ordonner les polynômes obtenus dans l'ordre des puissances décroissantes de x ou de t.

1. $P(x)=(2x^3-3x^2+4x-2)-(-x^2+2x+2)$.

2. $P(x)=(x+1)(x+1)-(x+2)x$.

3. $P(t)=(2t-3)(2t+3)-(2t-3)^2$.

2. + Même énoncé qu'à l'exercice **1** avec les expressions suivantes.

1. $P(x)=(-x-1)^2+(x+1)^2$.

2. $P(x)=x(3x+2)^2-(3x-2)^2$.

3. $P(t)=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t+\frac{1}{2}\right)$.

4. $P(t)=\frac{t-5}{3}+\frac{2-t}{6}-t^2$.

Racine d'un polynôme

▶ *a est **racine** du polynôme $P(x)$ si et seulement si : $P(a) = 0$.*

3. + -1 est-il racine du trinôme : $P(x)=-x^2+x+2$?
CORRIGÉ P. 253

4. + 2 est-il racine du trinôme : $P(x)=-2x^2+7x-6$?

5. + Déterminer deux polynômes du second degré $P(x)$ dont une racine est -2.
CORRIGÉ P. 253

6. + Déterminer deux polynômes du second degré $P(x)$ admettant pour racines : -1 et -3.

Équations du premier degré (ou se ramenant au premier degré)

Pour consolider les acquis, (exercices **7** à **11**).

7. + Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes.

a) $0{,}2x=7$.   b) $12x=0$.

8. + Même énoncé qu'à l'exercice **7**.

a) $4x=6x+1$.   b) $x=0{,}2x-1{,}6$.

9. + Même énoncé qu'à l'exercice **7**.

a) $2x+5=x-2+\frac{1}{2}x$.   b) $\frac{3}{4}x=\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$.

c) $(x-6)(x-1)=0$.   d) $(3x+3)(-x+5)=0$.

CORRIGÉ P. 254

10. ++

1. Développer et réduire l'expression $P(x)=(2x-1)(x-1)(x+2)$.

Exercices

2. Déduire du **1.** la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $2x^3+x^2-5x+2=0$.

CORRIGÉ P. 254

11. ++

a) Résoudre sur $]-\infty,-1[$ l'équation : $\dfrac{4x+1}{x+1}=0$.

b) Résoudre sur $\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ l'équation : $\dfrac{5x+4}{2x+1}=3$.

Équations du second degré

12. + Résoudre dans $\mathbb{R}$ sans utiliser les formules, l'équation du second degré suivante.
$(x+3)^2-16=0$.

Méthode : *factoriser le premier membre de l'équation à l'aide d'une identité remarquable (voir l'exercice **14**).*

CORRIGÉ P. 254

13. + Même énoncé qu'à l'exercice **12** avec :
$(x-3)(x-2)=(2x-1)(x-3)$.

14. ++ Sans utiliser les formules du cours, résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes.

a) $x^2-4x=0$. b) $2x^2+3=0$.

c) $x^2-5=0$. d) $(2x-5)^2-9=0$.

e) $-x^2+6x-9=0$.

Méthode : *pour résoudre les équations* c), d), e), *factoriser à l'aide d'une des identités remarquables :*
- $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
- $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

15. ++ Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations du second degré suivantes en utilisant les formules du cours. En déduire éventuellement une factorisation du polynôme correspondant.

a) $9x^2-6x+1=0$. b) $x^2-0{,}36x-3{,}28=0$.

c) $x^2-7x+6=0$. d) $-2x^2+5x-13=0$.

CORRIGÉ P.254

16. ++ En appliquant les formules du cours, résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations d'inconnue x ou q, suivantes. Dans le cas de solutions s'écrivant à l'aide du symbole $\sqrt{\ }$, donner la valeur approchée des résultats arrondie à 10^{-2}. En déduire éventuellement une factorisation du polynôme correspondant.

a) $6x^2+5x-4=0$. b) $2x^2+3x-5=0$.

c) $4x^2+4x-1=0$. d) $x^2+\dfrac{5}{2}x+1=0$.

e) $x^2+2x\sqrt{3}-1=0$. f) $4q^2-3q+2=0$.

▶ **Conseil :** *on peut vérifier les résultats obtenus à l'aide d'un logiciel de calcul formel.*

17. + Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue q :
$20\,000q^2-1\,020\,000q+1\,000\,000=0$.

18. ++ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :
$3x(x+1)+x^2-1=0$.

▶ **Remarque :** *développer ne conduit pas nécessairement au résultat par la méthode la plus rapide…*

19. ++ Résoudre dans $]-2,+\infty[$ l'équation d'inconnue x :
$\dfrac{3x^2+x+1}{x+2}=\dfrac{2}{3}$.

20. +++ **Simplification**

1. Factoriser les polynômes h et g définis sur $\mathbb{R}$ par :
$h(x)=10x^2-17x+3$ et $g(x)=5x^2+14x-3$.

2. Soit f la fonction définie sur $]3,+\infty[$ par :
$f(x)=\dfrac{10x^2-17x+3}{5x^2+14x-3}$.
Déduire du **1.** une expression simplifiée de $f(x)$.

Étude de signes et résolution d'inéquations

21. ++ **Étudier le signe d'un trinôme du second degré**

Dans chacun des cas suivants, donner dans un tableau le signe du trinôme $f(x)$ lorsque x varie dans $\mathbb{R}$.

a) $f(x)=3x^2-4x+5$. b) $f(x)=-2x^2-x+15$.

c) $f(x)=2x^2+5x+\dfrac{25}{8}$.

Méthode : *Calculer le discriminant Δ.*
*En appliquant le théorème figurant au paragraphe **3C.** du cours, déterminer le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans $\mathbb{R}$.*

CORRIGÉ P. 254

22. ++ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=-2x^2+3x+5$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$.

2. Donner dans un tableau le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans $\mathbb{R}$.

3. En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $f(x)\leq 0$.

CORRIGÉ P.254

23. ++ Même exercice que le **22** avec :
$f(x)=x^2-14x+33$.

24. ++ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x)=-4x^2+4x-1$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x)=0$.

Exercices

2. Déduire du **1.** la résolution de l'inéquation $g(x)\leq 0$.

Méthode : *pour les exercices **25** et **26**, faire une étude de signe en utilisant le théorème du paragraphe **3C.** du cours de ce chapitre. On pourra d'abord traiter avec profit l'exercice corrigé **22**.*

25. ++ Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes.

a) $(x-5)(x+7)\geq 0$. b) $-2x^2+5x-3\leq 0$.

26. ++ Même énoncé qu'à l'exercice **25**.

a) $-9x^2+6x-1\geq 0$. b) $x^2+2x+5\leq 0$.

27. +++ **Système d'inéquations à une inconnue**

On donne le système d'inéquations suivant :
$$\begin{cases}-x^2+9x+10\geq 0\\ -2x+15\leq 0.\end{cases}$$

▶ **Rappel :** *les solutions de ce système sont, s'ils existent, les nombres qui appartiennent simultanément à chacun des ensembles de solutions des deux inéquations.*

Résoudre ce système.

28. +++ **Étude du signe d'une fonction rationnelle**

Soit f définie sur $]-5,2[$ par :
$f(x)=\dfrac{3x-2}{x^2+3x-10}$.

1. Étudier, dans un tableau, le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans $]-5,2[$.

▶ *Avec prise d'initiatives.*

2. Résoudre dans $]-5,2[$ l'inéquation $f(x)\geq 0$.

Faire le lien avec les représentations graphiques

29. +++ **Courbe représentative et équation du second degré** TICE

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^2-3x+4$.

1. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-2}.

x	− 0,5	− 0,25	0	0,25	0,5	0,75	1	1,5
$f(x)$	5,25			3,19			0	

2. Déterminer les nombres réels x, s'ils existent, dont l'image est 4.

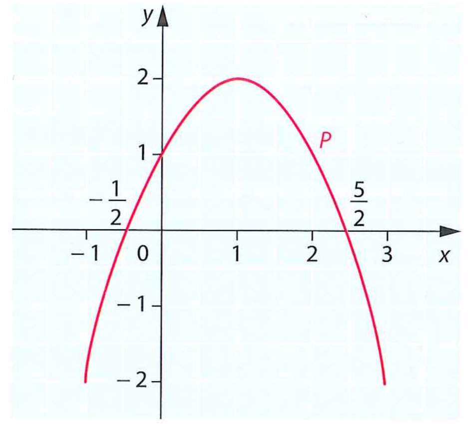
3. Même question qu'au **2.** en remplaçant 4 par − 6.

4. Faire apparaître sur l'écran de votre calculatrice la courbe représentative de f pour x appartenant à l'intervalle $[-4,-1]$.

CORRIGÉ P. 254

30. ++ **Lectures graphiques**

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $[-1,3]$ dont la courbe représentative P est donnée sur la figure ci-dessous. Pour tout x de $[-1,3]$, $f(x)$ est de la forme : $f(x)=ax^2+bx+c$.



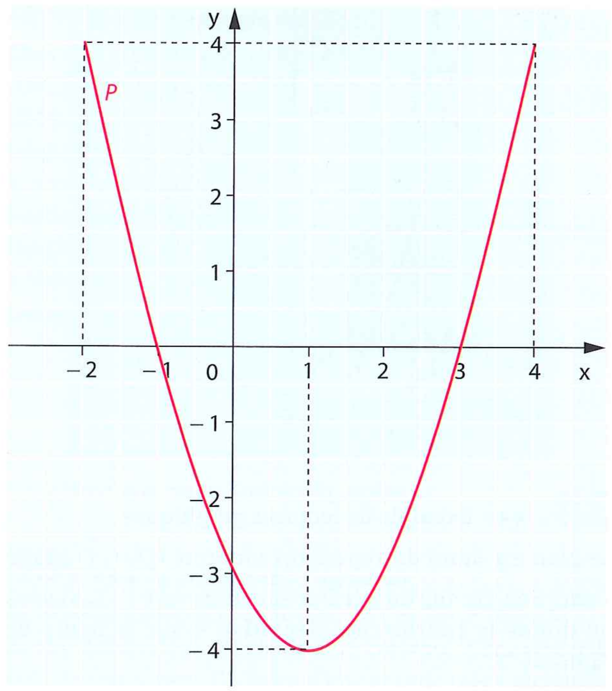
1. Lire sur le graphique les solutions de l'équation du second degré $f(x)=0$.

2. Résoudre graphiquement dans $[-1,3]$, l'inéquation $f(x)\leq 0$.

31. +++ **Lectures graphiques et résolution algébrique**

Soit f la fonction définie sur $[-2,4]$ par $f(x)=x^2-2x-3$.

La courbe représentative P de f est donnée sur la figure suivante.

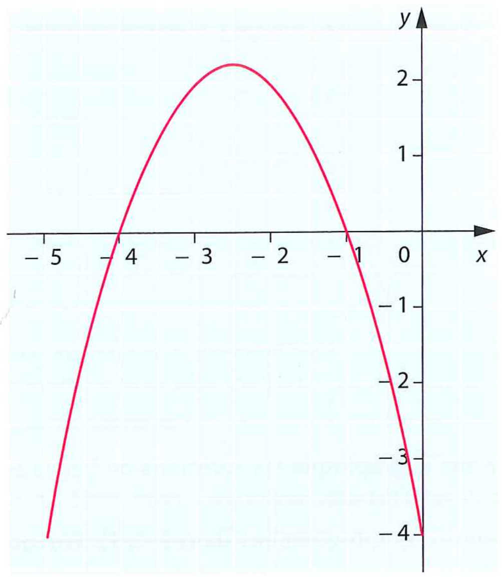


1. Déterminer graphiquement les solutions dans $[-2,4]$ de l'équation $x^2-2x-3=0$.

2. Résoudre graphiquement dans $[-2,4]$ l'inéquation $x^2-2x-3\leq 0$.

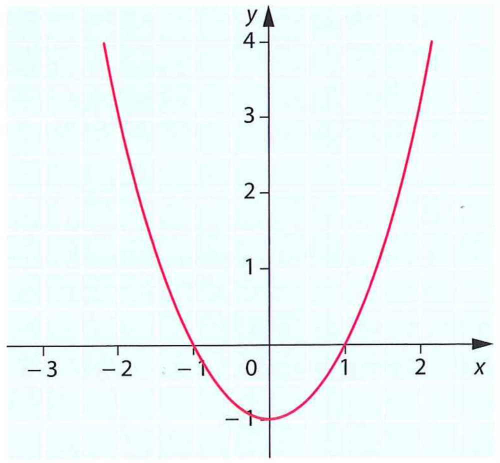
3. Retrouver par le calcul les résultats des questions **1.** et **2.**.

32. +++ **1.** Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 - 5x - 4$. On donne ci-dessous la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé. Utiliser le graphique pour donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $f(x) \geq 0$.



2. Retrouver par le calcul les résultats obtenus graphiquement au **1.**.

33. +++ Même exercice que le **32** avec $f(x) = x^2 - 1$ et la courbe représentative ci-dessous.



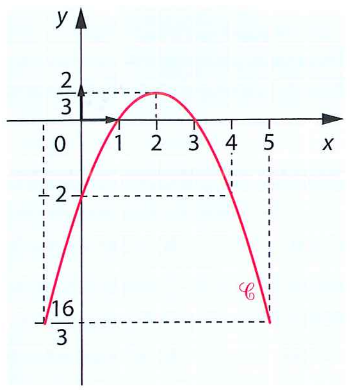
34. +++ **Exemple de lectures graphiques**

Le plan est muni du repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité 1 cm). Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1, 5]$ dont on donne la courbe représentative $\mathscr{C}$ sur la figure de l'annexe.

1. Utiliser ce graphique pour déterminer les valeurs de $f(-1), f(0), f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$.

2. Dans quel intervalle varie $f(x)$ lorsque x varie dans $[-1, 5]$?

Annexe



3. Résoudre graphiquement dans $[-1, 5]$ les équations suivantes après avoir reproduit la figure :

a) $f(x) = 0$; b) $f(x) = -2$;

c) $f(x) = 1$; d) $f(x) = \dfrac{2}{3}$.

4. a) Déterminer graphiquement pour quelles valeurs de x comprises entre -1 et 5 le nombre $f(x)$ est positif.

b) En déduire, dans un tableau, le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans $[-1, 5]$.

5. Résoudre graphiquement dans $[-1, 5]$ l'inéquation $f(x) \geq -2$.

6. Donner le tableau de variation de f sur $[-1, 5]$.

Pour quelle valeur de x la fonction f admet-elle un maximum ?

7. On suppose que la courbe $\mathscr{C}$ est un arc de parabole, c'est-à-dire que pour tout nombre réel x de $[-1, 5]$, $f(x) = ax^2 + bx + c$.

À l'aide de valeurs obtenues à la question **1.**, déterminer les nombres réels a, b, c.

> **Méthode :** *on peut, par exemple, déduire des égalités $f(0) = -2$, $f(1) = 0$ et $f(3) = 0$ un système linéaire simple de trois équations à trois inconnues, qui se ramène immédiatement à un système linéaire de deux équations à deux inconnues.*

8. Retrouver par le calcul :

a) Les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

b) L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq 0$.

CORRIGÉ P. 254

Mobiliser les résultats sur le second degré dans le cadre de la résolution d'un problème

35. ++ **On cherche un nombre entier**

Trouver un nombre entier naturel tel que si on ajoute 10 à son triple, on obtient son carré.

> **Méthode :** *mettre en équation consiste à désigner par n (ou x) le nombre cherché et à traduire la phrase de l'énoncé par une égalité donc une équation.*

36. ++ **Deux nombres entiers consécutifs**

Trouver deux nombres entiers naturels consécutifs sachant que la somme de leurs carrés est 2 813.

> *Noter n et n + 1 les deux nombres.*

CORRIGÉ P. 255

37. +++ **Trois nombres entiers consécutifs**

Trouver trois nombres entiers naturels consécutifs dont le quotient du produit par la somme est égal à 16.

38. +++ **L'intérêt caché**

Un capital de 10 000 € est placé à t % pendant un an. La *valeur acquise* au bout d'un an est alors placée à $(t+1)$ % pendant un an. Au bout de deux années, la nouvelle valeur acquise est 10 506 €. Calculer t.

> **Rappel :** *au bout d'un an la valeur acquise d'un capital C_0 placé pendant cette période à t % est $C_0 + C_0 \times \dfrac{t}{100} = \left(1 + \dfrac{t}{100}\right)C_0$.*

39. +++ **Deux remises successives**

On décide d'acheter un drone d'une valeur de 500 euros pour équiper une salle de travaux pratiques d'un lycée technologique. Le fournisseur consent deux remises successives de x % et de $(x - 5)$ %, où x est un nombre appartenant à l'intervalle $[5, 100]$.

1. Calculer le prix net à payer avec $x = 8$.

2. Dans cette question le prix net à payer après les deux remises est de 382,50 euros.

a) Démontrer que x est solution de l'équation :

$x^2 - 205x + 2\,850 = 0$.

b) En déduire x.

40. +++ **Deux remises successives (bis)**

Un commerçant accorde deux remises successives de x %, pour un achat dont le prix initial est de 1 000 euros. Après les deux remises, le prix à payer est de 902,50 euros.

Déterminer x.

> *Avec prise d'initiatives.*

41. ++++ **Les temps sont durs**

Une dépense de 1 000 euros doit être répartie également entre plusieurs personnes. Deux d'entre elles ne peuvent pas payer. La contribution de chacune des personnes solvables est augmentée de 25 euros. Déterminer le nombre de personnes débitrices.

> *Avec prise d'initiatives.*

42. ++++ **Transports scolaires**

Un établissement scolaire projette d'emmener une classe à une exposition. Le transporteur a fait un prix global de 120 euros. Quatre élèves supplémentaires s'ajoutent et chaque élève paye ainsi un euro de moins. Déterminer le nombre total d'élèves participant à ce déplacement.

> *Avec prise d'initiatives.*

43. ++++ **Le nombre d'autocars**

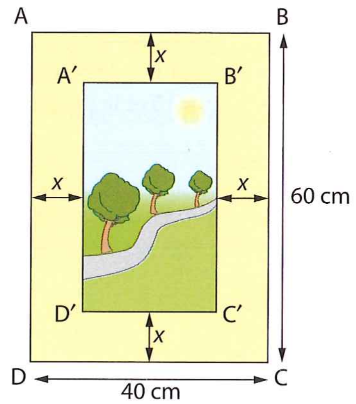
Un certain nombre d'autocars devaient emmener 300 élèves de Première de plusieurs lycées de la ville à une réunion d'information sur les métiers. L'un des autocars est tombé en panne. Il a fallu placer 10 élèves de plus dans chaque autocar restant. Combien y avait-il d'autocars au départ ?

> *Avec prise d'initiatives.*

44. ++ **Le rectangle évidé**

Dans le rectangle ABCD de la figure on découpe un trou rectangulaire A′B′C′D′, à x centimètres des bords. L'aire du rectangle A′B′C′D′ est 1 664 cm².

Déterminer x.

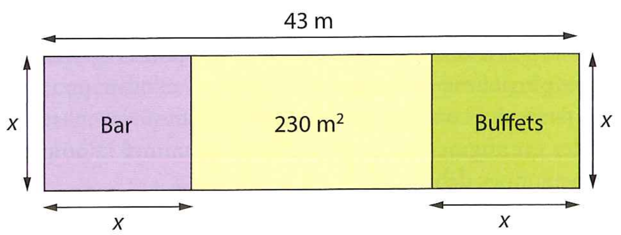


> *L'aire d'un rectangle de côtés l et L est A = l × L.*

45. +++ **Le restaurant s'agrandit**

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $-2x^2 + 43x - 230 = 0$.

2. Un restaurateur décide de faire construire une nouvelle salle de restaurant. Il s'agira d'une grande pièce rectangulaire de 43 mètres de long. À l'une des extrémités et sur la largeur de la salle, une partie carrée sera réservée au bar, et à l'autre extrémité, une autre partie carrée est destinée aux buffets (voir schéma). La partie centrale, devant accueillir les tables clients, occupera une aire de 230 m².



a) Utiliser le **1.** pour démontrer qu'il y a deux valeurs possibles pour x.

b) Laquelle choisir pour que l'espace attribué aux tables occupe plus de 50 % de la surface totale ?

Exemples de systèmes non linéaires dont la résolution conduit à une équation du second degré

46. +++ Trouver deux nombres x et y dont on donne la somme $x+y=15$ et le produit $xy=26$.

> **Méthode :**
> - *Exprimer y en fonction de x à partir de l'expression de la somme.*
> - *Remplacer y par le résultat obtenu, dans l'expression du produit.*
> - *Résoudre l'équation du second degré obtenue.*

CORRIGÉ P. 255

47. +++ Même énoncé qu'à l'exercice **46** avec $x+y=-1$ et $xy=-12$.

48. +++ Même énoncé qu'à l'exercice **46** avec $x+y=2$ et $xy=-35$.

49. +++ **Terrain rectangulaire**

Quelles sont les dimensions d'un terrain rectangulaire dont le périmètre mesure 108 m et l'aire 698,75 m^2 ?

50. +++ **Au fil de l'eau**

Sur une rivière, deux écluses sont distantes de 15 km. Un courant « descendant » de A vers B a une vitesse supposée constante de 2 km/h.

Un bateau fait la navette entre les écluses ; sa vitesse propre, c'est-à-dire ne tenant pas compte du courant, est supposée constante et égale à v.

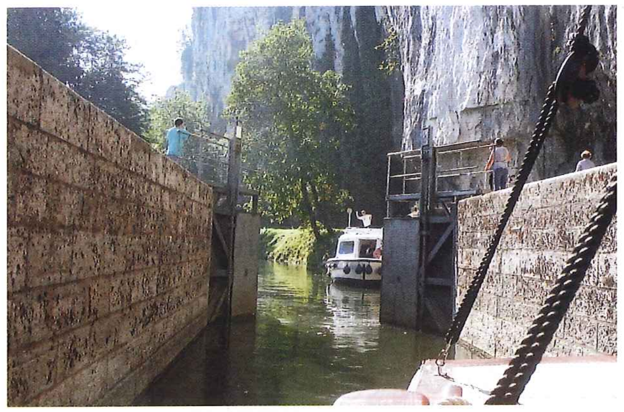
1. Donner l'expression du temps t, en fonction de v, mis par le bateau pour aller de A à B.

> ▶ *On rappelle, qu'à vitesse constante v, la distance parcourue d pendant un temps t est : d = vt.*

2. Donner l'expression du temps t_1, en fonction de v, mis par le bateau pour aller de B à A.

On admet que la vitesse propre du bateau et celle du courant s'ajoutent à la descente et se retranchent à la montée.

3. À partir de A, et sans s'arrêter en B, le bateau fait un aller-retour entre les deux écluses en 4 heures. Calculer la vitesse v.



Exemples de résolution de systèmes d'équations linéaires à deux inconnues

> Les exercices **51** à **54** sont destinés à consolider des notions étudiées dans les classes antérieures.

51. ++ Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ chacun des systèmes suivants.

a) $\begin{cases} x+y=-1 \\ 2x-y=-3. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-y=-2 \\ 2x+3y=1. \end{cases}$

CORRIGÉ P. 255

52. ++ Même énoncé qu'à l'exercice **51**.

a) $\begin{cases} 6x-2y=1 \\ 3x+12y=7. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x+5y=-3 \\ 4x-9y=35. \end{cases}$

53. ++ Même énoncé qu'à l'exercice **51**.

a) $\begin{cases} x+3y=15 \\ 2x+y=10. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-5y=-15 \\ 5x+3y=40. \end{cases}$

54. + Même énoncé qu'à l'exercice **51**.

$\begin{cases} 2,4x-1,5y=0,3 \\ 1,8x+0,5y=5,1. \end{cases}$

Utiliser des fonctions polynômes du second degré

55. +++ **L'offre, la demande et le prix d'équilibre**

Une étude de marché s'intéresse à l'évolution de l'offre et de la demande d'un certain produit en fonction du prix unitaire x, exprimé en euros.

Pour un prix unitaire de x euros, compris entre 2 et 30, le nombre de produits demandés, ou *offre*, est modélisé par :

$$f(x) = 0,05x^2 - 4x + 80,8$$

et le nombre de produits offerts, ou *demande*, est modélisé par :

$$g(x) = 2x + 16.$$

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, tracées sur le graphique de l'annexe représent respectivement les fonctions f et g.

1. a) Déterminer graphiquement le nombre de produits offerts et le nombre de produits demandés lorsque le prix du produit est de 18 €.

Vous ferez apparaître sur le graphique les tracés utiles.

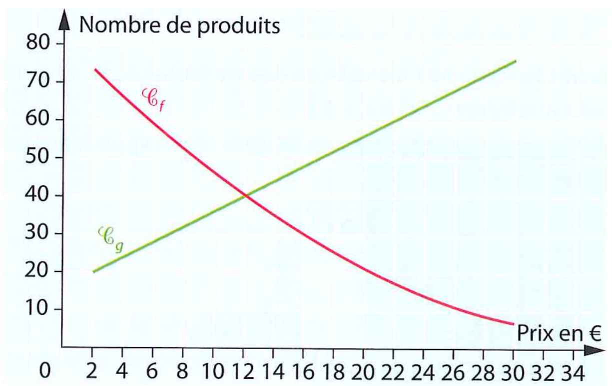
b) Retrouver les résultats du a) par le calcul.

2. On appelle *prix d'équilibre d'un produit*, le prix pour lequel l'offre et la demande sont égales.

a) Déterminer graphiquement le prix d'équilibre de ce produit.

b) Retrouver le résultat du a) par le calcul.

c) On se place au prix d'équilibre, quel est alors le nombre de produits demandés (et donc aussi offerts) et le chiffre d'affaires réalisé ?



56. +++ **Offre et demande (bis)**

Les fonctions d'*offre* f et de *demande* g d'un bien sont définies par : $f(q) = q^2 + 2q + 24$ et $g(q) = 0,9q^2 - 18q + 134$, pour une quantité q variant de 1 à 8 tonnes.

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, à l'aide d'une calculatrice graphique, tracer les représentations graphiques de ces deux fonctions pour q compris entre 1 et 8.

2. Déterminer graphiquement, puis par le calcul, les coordonnées du point d'intersection de ces deux courbes.

3. En déduire la quantité d'équilibre du marché offre-demande et le prix d'équilibre.

57. +++ **Coût de production et bénéfice**

Un artisan fabrique des vases qu'il met en vente. On suppose que tous les vases fabriqués sont vendus.

L'artisan veut faire une étude sur la production d'un nombre de vases compris entre 0 et 60. Il estime que le coût de production de x vases fabriqués est modélisé par la fonction C dont l'expression est :

$$C(x) = x^2 - 10x + 500,$$

où x appartient à l'intervalle [0, 60].

Chaque vase est vendu 50 euros.

Sur le graphique donné en annexe 2, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction C et $\mathscr{D}$ est la droite d'équation : $y = 50x$.

1. Par lecture graphique, déterminer :

a) le coût de production de 40 vases fabriqués.

b) la production, à une unité près, qui correspond à un coût total de 1 300 euros.

2. On note $R(x)$ la recette, en euros, correspondant à la vente de x vases fabriqués.

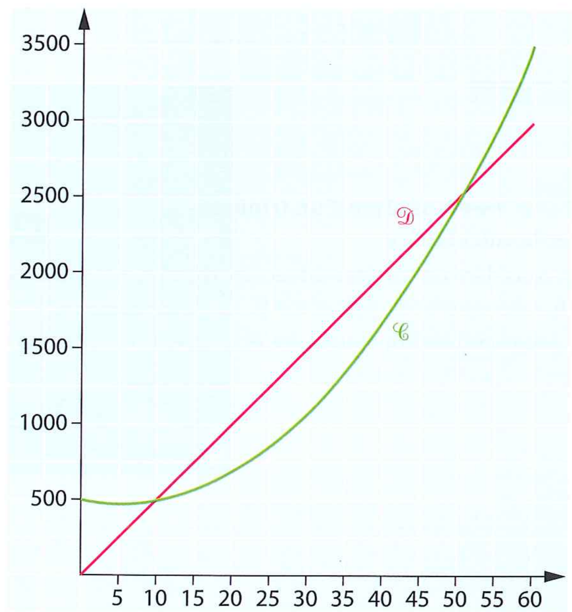
a) Exprimer $R(x)$ en fonction de x.

b) Déterminer graphiquement le nombre de vases que l'artisan doit fabriquer pour réaliser un bénéfice.

c) Résoudre par le calcul sur [0, 60] l'inéquation $R(x) \geq C(x)$.

3. a) Montrer que le bénéfice, en euros, réalisé par la fabrication et la vente de x vases, est donné par la fonction B dont l'expression est $B(x) = -x^2 + 60x - 500$, où x appartient à l'intervalle [0, 60].

4. Calculer le bénéfice pour trente vases fabriqués et vendus.



Exemples d'utilisation du tableur

58. ++++ **Coût de production et recette avec la calculatrice ou le tableur** ALGO

Une entreprise fabrique des téléviseurs. Chaque mois, elle produit un nombre x de téléviseurs compris entre 1 000 et 6 000. Le coût de production, exprimé en euros, de x téléviseurs est donné par $c(x) = 0{,}003x^2 + 60x + 48\,000$.

Chaque téléviseur est vendu 89 € par l'entreprise. On suppose que l'entreprise parvient à vendre toute sa production.

1. L'entreprise réalise-t-elle un bénéfice lorsqu'elle fabrique et vend 2 000 téléviseurs ? 4 000 téléviseurs ?

2. On considère l'algorithme de l'annexe.

Quel est le rôle de cet algorithme ?

3. Traduire l'algorithme dans un langage et saisir le programme sur calculatrice ou sur tableur (macro en langage basic).

Tester votre programme avec $x = 2\,000$ et $x = 4\,000$.

4. Modifier l'algorithme de façon à faire afficher « bénéfice » ou « perte ».

5. Ajouter cette modification d'algorithme à votre programme, puis le tester.

Annexe

<u>Entrées</u>
Saisir x (entier entre 1 000 et 6 000)
<u>Traitement</u>
c prend la valeur $0{,}003x^2 + 60x + 48\,000$
r prend la valeur $89x$
<u>Sortie</u>
Afficher $r - c$

CORRIGÉ P. 255

59. ++++ **Analyse d'un trinôme avec la calculatrice** ALGO

On considère un trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ avec a, b, c des nombres réels et $a \neq 0$.

Le programme ci-dessous a été écrit avec une calculatrice.

Texas Instruments

```
PROGRAM:TRINOME
:Input "A=",A
:Input "B=",B
:Input "C=",C
:B^2-4*A*C→D
:If A>0
:Then
:Disp "POSITIF"
```

```
PROGRAM:TRINOME
:Else
:Disp "NEGATIF"
:End
:If D>0
:Then
:Disp "A L EXTER
IEUR"
```

```
PROGRAM:TRINOME
IEUR"
:Disp "DES RACIN
ES"
:Else
:Disp "TOUJOURS"

:End
```

Casio

```
======TRINOME ======
"A=":?→A↵
"B=":?→B↵
"C=":?→C↵
B^2-4×A×C→D↵
If A>0↵
Then ↵
TOP BTM SRC MENU A⇔a CHAR
```

```
======TRINOME ======
"POSITIF"↵
Else ↵
"NEGATIF"↵
IfEnd↵
If D>0↵
Then ↵
TOP BTM SRC MENU A⇔a CHAR
```

```
======TRINOME ======
Then ↵
"A L EXTERIEUR"↵
"DES RACINES"↵
Else ↵
"TOUJOURS"↵
IfEnd
TOP BTM SRC MENU A⇔a CHAR
```

1. À quoi correspond la variable D ?

2. Quelles sont les deux conditions apparaissant dans ce programme ?

3. a) Quelles sont les valeurs des variables A, B, C et D pour le trinôme $x^2 + x - 2$?

b) Que signifie l'affichage ci-dessous, correspondant aux valeurs précédentes ?

```
A=1
B=1
C=-2
POSITIF
A L EXTERIEUR
DES RACINES
                Fait
```

```
1
C=
?
-2
POSITIF
A L EXTERIEUR
DES RACINES
```

4. a) Quelles sont les valeurs des variables A, B, C et D pour le trinôme $-x^2 + x - 1$?

b) Que signifie l'affichage ci-dessous, correspondant aux valeurs précédentes ?

```
                Fait
A=-1
B=1
C=-1
NEGATIF
TOUJOURS
                Fait
```

```
?
1
C=
?
-1
NEGATIF
TOUJOURS
```


5. a) À quelles conditions, sur les variables A et D, obtient-on l'affichage « POSITIF TOUJOURS » ?

b) Donner un exemple de trinôme $ax^2 + bx + c$ pour lequel cela se produit.

CORRIGÉ P. 255

60. ++++ **Coût et dépassement avec la calculatrice ou le tableur** ALGO

Une usine chimique fabrique un produit liquide. Le coût de production, en euros, de x hectolitres de ce produit est donné par $c(x) = 0{,}5x^2 + 600x + 30\,000$.

On considère l'algorithme ci-dessous.

<u>Entrée</u>
Saisir k (entier supérieur à 30 000)
<u>Initialisation</u>
x prend la valeur 0
<u>Traitement</u>
Tant que $0{,}5x^2 + 600x + 30\,000 < k$
x prend la valeur $x + 1$
FinTantque
<u>Sortie</u>
Afficher x

1. La boucle « Tant que » de cet algorithme dépend d'une condition. Laquelle ?

Quand sort-on de la boucle ?

2. On dispose du tableau de valeurs suivant, pour le coût de production $c(x)$.

x	0	1	2	3	4	5
$c(x)$	30 000	30 600,5	31 202	31 804,5	32 408	33 012,5

x	6	7	8	9	10
$c(x)$	33 618	34 224,5	34 832	35 440,5	36 050

On entre dans l'algorithme la valeur $k = 35\,000$. Quelle est la valeur de x affichée par l'algorithme ?

3. Définir le rôle de l'algorithme.

4. Saisir le programme correspondant à cet algorithme sur une calculatrice ou un tableur et l'exécuter avec $k = 100\,000$ puis $k = 200\,000$.

TEXAS INSTRUMENTS TI-83 Plus.fr

```
PROGRAM:COUT
:Prompt K
:0→X
:While 0.5X²+600
X+30000<K
:X+1→X
:End
:Disp "X=",X
```

CASIO GRAPH 85 SD

```
======COUT     ======
"K=":?→K↵
0→X↵
While 0.5X²+600X+3000
0<K↵
X+1→X↵
WhileEnd↵
COM CTL JUMP ? ◢ ▷
```

Excel Visual Basic :

```
Sub Cout()
k = Application.InputBox("Entrer k", Type:=1)
x = 0
While 0.5 * x ^ 2 + 600 * x + 30000 < k
x = x + 1
Wend
MsgBox ("La quantité est  " & x)
End Sub
```

OpenOffice Calc Basic :

```
REM  *****  BASIC  *****

Sub Main
k=CDbl(InputBox("Entrer k"))
x=0
While 0.5*x^2+600*x+30000<k
x=x+1
Wend
MsgBox("La quantité est  "&x)
End Sub
```

CORRIGÉ P. 256

RÉPONSES P. 256

QCM

Indiquez sur votre copie, pour chaque question posée, la bonne réponse (ou une bonne réponse) parmi les propositions de l'énoncé ; aucune justification n'est demandée.

QCM interactifs 61 à 65

61. ++ Équations

Le QCM 61 est destiné à consolider les acquis des classes antérieures.

		a	b	c
1	La solution de l'équation $3x+5=0$ est :	$\frac{5}{3}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{5}{3}$
2	La solution de l'équation $\frac{x}{2}+1=x-4$ est :	$\frac{1}{10}$	10	$\frac{5}{2}$
3	Les solutions de l'équation $(x-4)(2x+7)=0$ sont :	4 et $-\frac{7}{2}$	4 et $\frac{2}{7}$	0 et $\frac{7}{2}$
4	Une solution de l'équation $3x^2-5x+2=0$ est :	-1	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{3}$

62. ++ Équations du second degré

		a	b	c
1	Le discriminant de l'équation $-4x^2-3x+1=0$ est :	$\Delta=5$	$\Delta=25$	$\Delta=-7$
2	Le discriminant de l'équation $2x^2-9x+10=0$ est $\Delta=1$; les solutions de cette équation sont :	4 et 5	$-\frac{5}{2}$ et -2	2 et $\frac{5}{2}$
3	Le trinôme $4x^2-4x+1$ a pour discriminant $\Delta=0$; la racine du trinôme est :	2	1	$\frac{1}{2}$
4	Le trinôme $-x^2+x-2$ possède :	une racine double	deux racines	zéro racine

63. ++ Factoriser un trinôme du second degré

		a	b	c
1	-1 et 2 sont solutions de l'équation $3x^2-3x-6=0$; alors pour tout nombre réel x, $3x^2-3x-6$ est égal à :	$(x+1)(x-2)$	$3(x-1)(x+2)$	$3(x+1)(x-2)$
2	Le trinôme $-x^2-4x-4$ a pour discriminant $\Delta=0$; alors $-x^2-4x-4$ est égal à :	$(x-4)^2$	$-(x-2)^2$	$-(x+2)^2$

64. ++ Inéquations

		a	b	c
1	Une solution de l'inéquation $-4x+1\leq 0$ est :	0	1	-1
2	L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $4x+5>0$ est :	$\left]-\frac{5}{4},+\infty\right[$	$\left]\frac{5}{4},+\infty\right[$	$\left]-\frac{4}{5},+\infty\right[$
3	L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $4x+1\geq 7x-5$ est constitué de :	tous les nombres inférieurs ou égaux à 2	tous les nombres supérieurs ou égaux à 2	tous les nombres inférieurs ou égaux à -2
4	La partie en couleur représente l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $4x+1\leq 6x+5$:	-2 0	-2 0	0 2
5	L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $(-2x+1)(x+3)\geq 0$ est :	$]-\infty,-3]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$	$\left]-3,\frac{1}{2}\right[$	$\left[-3,\frac{1}{2}\right]$
6	L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $x^2+4x+4\leq 0$ est :	$\{-2\}$	$\mathbb{R}$	$\varnothing$
7	L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $-2x^2+x+1\geq 0$ est :	$\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty[$	$\varnothing$	$\left[-\frac{1}{2},1\right]$

65. ++ Fonction polynôme du second degré

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$ et Γ sa courbe représentative dans un repère du plan. Alors, un des points d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses a pour coordonnées :

a) (2, 0) b) (– 3, 0) c) (0, – 3).

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2x^2 + 5x - 3$ et P la parabole représentant la fonction f dans un repère orthogonal.

a) Si $f(x) = 0$, alors $x = 1{,}5$;

b) P a pour sommet le point S de coordonnées (1,25 ; 0,125).

c) Pour tout x réel, $f(x) = (x - 1)(2x - 3)$.

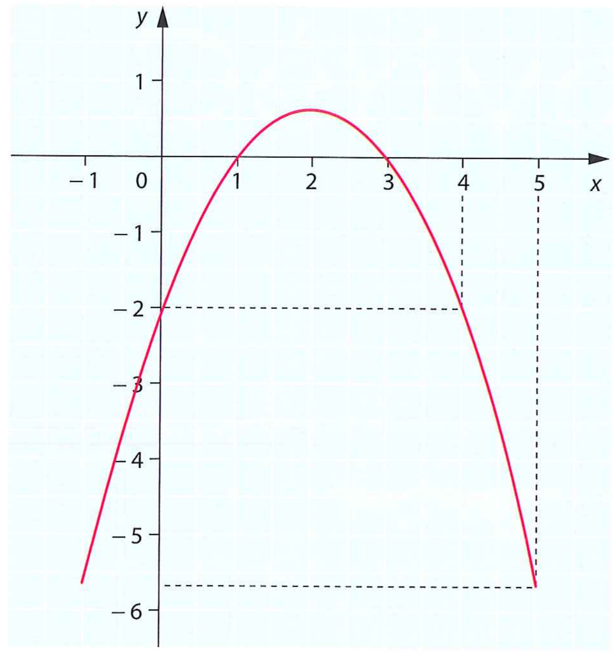
RÉPONSES P. 256

Vrai • Faux

Répondez, par VRAI ou FAUX, aux questions suivantes (une justification est demandée lorsque la réponse est FAUX ; aucune justification n'est demandée lorsque la réponse est VRAI).

66. ++ Lectures graphiques

On considère une fonction polynôme f du second degré définie sur $[-1, 5]$, dont la courbe représentative P est donnée sur la figure ci-dessous.



1. 0 a pour image 1 par f.

2. – 2 a deux antécédents.

3. La fonction f est définie sur $[-1, 5]$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$. On a : $a > 0$.

4. L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions.

5. L'ensemble des solutions dans $[-1, 5]$ de l'inéquation $f(x) \leq 0$ est $[1, 3]$.

6. Dans $f(x)$, on peut mettre en facteur le produit $(x-1)(x-3)$.

Évaluation

Les exercices suivants pourraient figurer dans une évaluation.

67. +++ Calculs algébriques

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 5x - 3$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

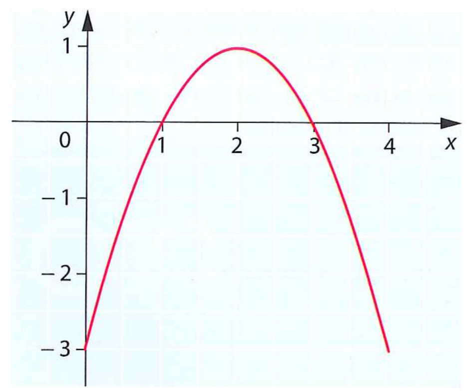
2. Étudier le signe de $f(x)$ dans un tableau.

3. Résoudre l'inéquation $-2x^2 + 5x - 3 \geq 0$.

68. +++ Lectures graphiques et calculs algébriques

Soit f la fonction définie sur $[0, 4]$ par $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

La courbe représentative P de f est donnée sur la figure.



1. Déterminer graphiquement les solutions dans $[0, 4]$ de l'équation $-x^2 + 4x - 3 = 0$.

2. Résoudre graphiquement dans $[0, 4]$ l'inéquation $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$.

3. Retrouver par le calcul les résultats obtenus aux questions **1.** et **2.**.

69. +++ Taux d'inflation

Entre 2010 et 2011, le taux d'inflation d'un pays a été de i %. Entre 2011 et 2012, ce taux a doublé. Entre 2010 et 2012, le taux d'inflation global a été de 6,08 %. Déterminer le taux d'inflation i.

▶ Voir l'exercice 47 du chapitre 1.

70. +++ Placement avec intérêts composés

Un capital de 1 000 euros est placé à t % par an, avec intérêts composés. Au bout de deux ans, la valeur acquise de ce capital s'élève à 1 040,4 euros. Déterminer le taux t.

▶ Voir l'exercice 61 du chapitre 2.

71. +++ Coût total et bénéfice

Dans une entreprise on produit un certain type de pièces pour l'industrie automobile. Le coût total de fabrication journalier, en euros, de q pièces est donné par $C(q) = 2q^2 - 60q + 500$, pour q appartenant à $[0, 40]$.

1. a) On désigne par « coûts fixes » le coût lorsque $q = 0$. (C'est le coût des charges pour les locaux, l'électricité...). Quels sont les coûts fixes ?

b) Déterminer la quantité à produire pour laquelle le coût de fabrication est égal à 850 euros.

RÉPONSES P. 256

2. On suppose que chaque pièce est vendue 10 euros.

a) Exprimer en fonction de q le bénéfice $B(q)$.

b) Résoudre dans [0, 40] l'inéquation $B(q) \geq 0$.

c) Donner une interprétation économique du résultat obtenu au **b)**.

72. +++ Problème d'impression

On désire imprimer une carte carrée. On appelle x la mesure, en centimètres, d'un côté de la carte. On laisse sur celle-ci une marge de 2 cm en haut et en bas, et une marge de 1 cm à gauche et à droite.

1. Faire une figure.

2. Exprimer, en fonction de x, l'aire A, en cm^2, de la surface imprimable.

3. a) Déterminer x pour que l'aire de la surface imprimable mesure 143 cm^2.

b) En déduire alors l'aire de la carte.

73. +++ Le meilleur prix

On a acheté pour 72 euros un certain nombre de compact disques. Si on avait payé chaque disque 3 euros de moins, pour le même prix on aurait eu 4 disques de plus. Combien a-t-on acheté de compact disques ?

74. +++ C'est bon pour la Planète...

Dans ce qui suit, les coefficients multiplicateurs sont à arrondir à 10^{-4}.

Le responsable d'une usine s'engage à diminuer un certain type de rejets de 40 % en cinq ans. La première année, il est prévu de diminuer ces rejets de 15 %, la deuxième année de les diminuer de 10 % et la troisième année, de les diminuer de 5 %.

1. Démontrer, qu'au bout des trois premières années, la baisse des rejets sera d'environ 27,32 %.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Pour atteindre l'objectif prévu au bout de cinq ans, quel pourcentage annuel de baisse faut-il prévoir pour les deux dernières années, en supposant que ce pourcentage est le même (pour les deux dernières années) ?

75. +++ Courbe des ventes avec le tableur TICE

Les ventes, en milliers d'exemplaires, d'un fabriquant de panneaux solaires, entre 2005 (année 0) et 2015, sont données dans le tableau ci-dessous. Pour faire une prévision, on utilise comme modèle mathématique la fonction f définie sur l'intervalle [0, 10] par :

$f(x) = -0{,}65\,x^2 + 8{,}65\,x + 14$, qui peut être représentée par un arc de parabole P. L'expression $f(x)$ correspond à la production de l'année 2005 + x.

	A	B	C
1	Rang de l'année	Vente en milliers	Modèle mathématique
2	0	14	14
3	1	22	22
4	2	28	28,7
5	3	33,5	34,1
6	4	38,5	38,2
7	5	41	41
8	6		42,5
9	7		42,7
10	8		41,6
11	9		39,2
12	10		35,5

1. Quelle formule a-t-on entrée en C2, puis recopiée vers le bas, pour tabuler la fonction f ?

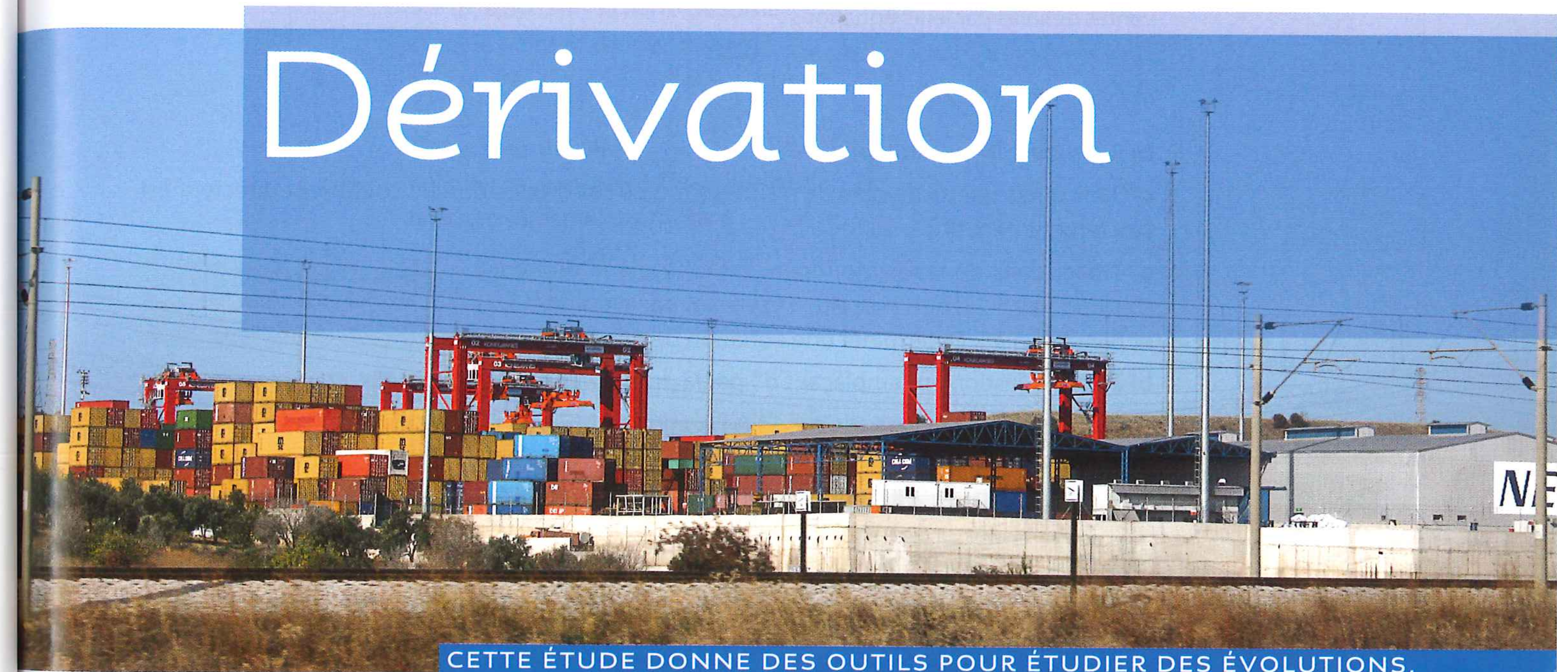
2. Les points $A(0, 14)$; $B(1, 22)$ et $C(5, 41)$ sont-ils sur P ?

3. Combien de panneaux vendra-t-on en 2012 ?

4. Quand atteindra-t-on le maximum des ventes ?

CHAPITRE 4

Dérivation



CETTE ÉTUDE DONNE DES OUTILS POUR ÉTUDIER DES ÉVOLUTIONS, MINIMISER DES COÛTS DE FABRICATION, DE STOCKAGE, DE TRANSPORT...

CAPACITÉS

- Déterminer l'expression de la fonction dérivée d'une fonction polynôme du second degré.
- Utiliser le signe de la fonction dérivée pour retrouver les variations du trinôme et pour déterminer son extremum.
- Déterminer une équation de la tangente en un point du graphe d'une fonction trinôme du second degré.
- Tracer cette tangente.
- Déterminer l'expression de la fonction dérivée d'une fonction polynôme de degré 3.
- Dans le cadre d'une résolution de problèmes, utiliser le signe de la fonction dérivée pour déterminer les variations d'une fonction polynôme de degré 3.