Fiche de correction d'exercices

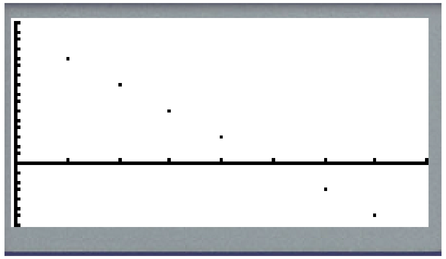
Exercice 7 Soit u une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 15$ et de raison -3.

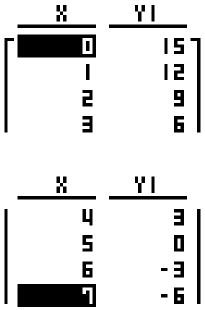
1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Quel est le sens de variation de cette suite ?
3. Dans un repère, représenter les points associés aux huit premiers termes de cette suite.
4. Par le calcul, déterminer le rang n à partir duquel $u_n < -21$.

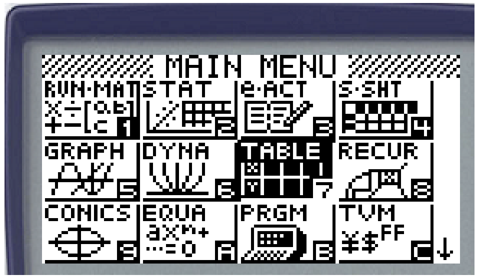
1. $U_n = U_0 + n \times r$

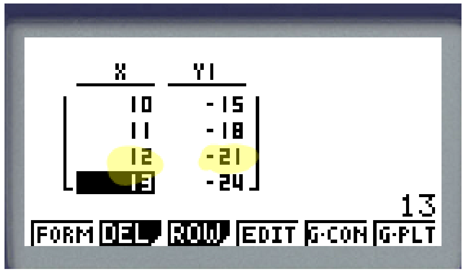
$U_n = 15 - 3n$

2. (U_n) est une suite arithmétique dont la raison $r = -3$ est négative donc (U_n) est décroissante.









3. D'après le tableau de valeurs pour $n > 12$ on a $U_n < -21$

Voici le calcul : $U_n < -21$

$\Leftrightarrow 15 - 3n < -21$

$\Leftrightarrow -3n < -36$

$\Leftrightarrow n > 12$ (*)

(*) NB : Je divise membre à membre par -3 (<0) donc j'obtiens une inégalité de sens contraire

Exercice 8 Dans chacun des cas suivants, u désigne une suite arithmétique. Déterminer le sens de variation de ces suites.

1. $u_0 = -2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 8$.
2. Pour tout entier naturel n, $u_n = 7 - 6n$.
3. $u_0 = 7$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n$.

1 on reconnaît la forme récurrente du type

$U_{n+1} = U_n + r$

$r = 8$ (U_n) est croissante

2. on reconnaît la forme explicite du type

$U_n = U_0 + n \times r$ avec $U_0 = 7$ et $r = -6$

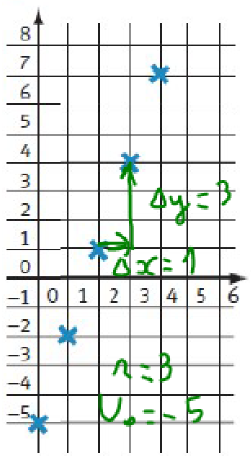
$r < 0$ donc la suite est décroissante

3. c'est la forme récurrente, et il est évident que la suite est constante.

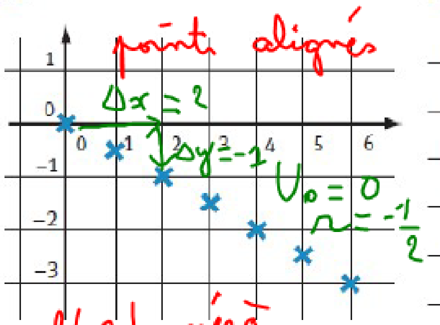
$r = 0$

Exercice 10 Parmi les graphique suivants, indiquer ceux qui représentent les points associés aux premiers termes d'une suite arithmétique. Dans le cas d'une suite arithmétique, indiquer le premier terme et la raison de la suite.

1

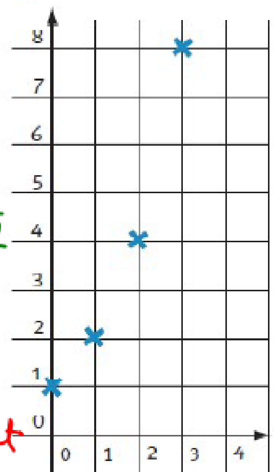


2



l'ordonnée à l'origine fournit U_0 et le coefficient directeur : la raison

3



Les points ne sont pas alignés

Rappel : coefficient directeur d'une droite $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Exercice 11 Un particulier effectue un devis auprès d'une entreprise de forage. Le coût du forage d'un puits est calculé de la manière suivante :

– le premier mètre coûte 200 €

– chaque mètre supplémentaire coûte 70 € de plus que le précédent.

On note u_n le prix du $n^{\text{ième}}$ mètre foré. Ainsi $u_1 = 200$.

1. Calculer u_2 et u_3 .
2. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Donner l'expression de u_n en fonction de n.
3. Déterminer le prix à payer pour forer un puits de 9 mètres de profondeur.

Exercice 15 Soit u une suite géométrique de premier terme $u_7 = 2$ et de raison 3.

1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Calculer u_{17} .

1. pour tout entier n et p on a :

$U_n = U_p \times q^{n-p}$

pour $p = 7$ on a alors $U_n = U_7 \times q^{n-7}$

soit pour tout n, $U_n = 2 \times 3^{n-7}$

2. pour $n = 17$ on a : $U_{17} = 2 \times 3^{10}$

$U_{17} = 118098$

1. $U_1 = 200$

$U_2 = 200 + 70 = 270$

$U_3 = 200 + 70 + 70 = 340$

2. On passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours la même quantité $r = 70$

donc (U_n) est arithmétique de raison $r = 70$ et de premier terme $U_1 = 200$

Pour tout $n > 0$ on a $U_n = U_1 + (n-1) \times r$

soit $U_n = 200 + 70(n-1)$

3. Pour $n = 9$ $U_9 = 200 + 70 \times 8$

$= 200 + 560$

$U_9 = 760$

Le prix à payer pour 9 m de profondeur sera de 760 €.

Exercice 17

u est une suite géométrique de raison $q > 0$. Dans chacun des cas suivants, calculer q :

1. $u_3 = 9$ et $u_5 = 81$.
2. $u_{12} = 0{,}001$ et $u_{18} = 1000$
3. $u_7 = 21$ et $u_{60} = 21$

pour tout n et p on a : $U_n = U_p \times q^{n-p}$

1) pour $n = 5$ et $p = 3$ on a $U_5 = U_3 \times q^2$

$81 = 9 \times q^2$

donc $q^2 = \frac{81}{9}$

$q^2 = 9$

L'énoncé nous donne $q > 0$ donc $q = \sqrt{9}$

$q = 3$

(sinon -3 conviendrait également, donc lis bien les consignes)

2. pour $n = 18$ et $p = 12$ on a $U_{18} = U_{12} \times q^6$

$1000 = 0{,}001 \times q^6$

$q^6 = \frac{1000}{0{,}001}$

Méthode !!!

donc $q = \left(\frac{1000}{0{,}001}\right)^{1/6}$

$q = 10$

3. pour $n = 60$ et $p = 7$ on a : $U_{60} = U_7 \times q^{53}$

$21 = 21 \times q^{53}$

$q^{53} = 1$ donc $q = 1$

Exercice 18

Soit u une suite géométrique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison 1,25.

1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Quel est le sens de variation de cette suite ?
3. Dans un repère, représenter les points associés aux huit premiers termes de cette suite.
4. A l'aide de la calculatrice ou du tableur, déterminer le rang n à partir duquel $u_n > 10000$.

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$ $U_n = U_0 \times q^n$

$U_n = 4 \times 1{,}25^n$

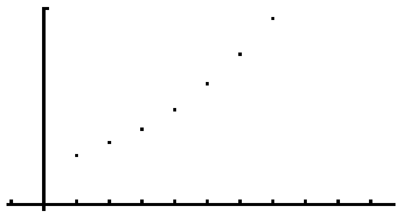
2. $q > 1$ donc la suite est croissante

3. Dresse un tableau de valeurs à la calculatrice

X	Y1
0	4
1	5
2	6.25
3	7.8125

X	Y1
4	9.7656
5	12.207
6	15.258
7	19.073

Table Setting
X
Start:0
End :50
Step :1



X	Y1
23	677.62
24	847.03
25	1058.7
26	1323.4

4. $n \geqslant 25$

Dans ces 2 exercices on détermine le sens de variation à partir de l'observation de q.

Exercice 19 Dans chacun des cas suivants, u désigne une suite géométrique. Déterminer le sens de variation de ces suites.

1. Pour tout entier naturel n, $u_n = 0{,}32^n$. $q = 0{,}32$ $\quad 0 < q < 1$
2. Pour tout entier naturel n, $u_n = 5^n$. $q = 5$ $\quad q > 1$
3. Pour tout entier naturel n, $u_n = 1^n$. $q = 1$ $\quad q = 1$
4. Pour tout entier naturel n, $u_n = -2 \times 6^n$. $q = 6$ $\quad q > 1$
5. Pour tout entier naturel n, $u_n = 7 \times \left(\frac{5}{4}\right)^n$. $q = \frac{5}{4}$ $\quad q > 1$
6. Pour tout entier naturel n, $u_n = 21 \times 0{,}6^n$. $q = 0{,}6$ $\quad 0 < q < 1$
7. Pour tout entier naturel n, $u_n = -0{,}1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$. $q = \frac{1}{3}$ $\quad 0 < q < 1$

ce sont les formes explicites

$0 < q < 1$: suite décroissante

$q = 1$: suite constante

$q > 1$: suite croissante

Exercice 20 Dans chacun des cas suivant, u désigne une suite géométrique. Déterminer le sens de variation de ces suites.

1. $u_0 = -2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}5 \times u_n$. $q = 0{,}5$ $\quad 0 < q < 1$
2. $u_0 = -3{,}1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 5 \times u_n$. $q = 5$ $\quad q > 1$
3. $u_0 = 7$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n$. $q = 1$ $\quad q = 1$
4. $u_0 = 6{,}5$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{3}{2} u_n$. $q = 3/2$ $\quad q > 1$
5. $u_0 = 0{,}4$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}1 \times u_n$. $q = 1{,}1$ $\quad q > 1$

Exercice 21 **Intérêts composés**

Un capital de 5 000 € est placé au taux annuel de 3,5 % à intérêts composés. On note C_0 le capital initial et C_n celui disponible au bout de n années.

1. Calculer C_1 et C_2.
2. a) Quelle est la nature de la suite (C_n) ?
   b) Exprimer C_n en fonction de n.
3. A l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, déterminer à partir de quelle année le capital disponible aura doublé ?

1. $C_0 \xrightarrow{+3{,}5\%} C_1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow C_n \xrightarrow{+3{,}5\%} C_{n+1}$

$\times 1{,}035$

augmenter de 3,5% revient à multiplier par

$c = 1 + t = 1 + \frac{3{,}5}{100} = 1{,}035$

$C_1 = C_0 \times 1{,}035 = 5000 \times 1{,}035 = 5175$ €

$C_2 = C_1 \times 1{,}035 = 5356{,}125$ €

2. (C_n) est une suite géométrique car on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par la même quantité $q = 1{,}035$ appelée raison de la suite.
Son premier terme est $C_0 = 5000$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad C_n = C_0 \times q^n$
$= 5000 \times 1{,}035^n$

3.

X	Y1
18	9287.4
19	9612.5
20	9948.9
21	10297

$n \geq 21$