Se préparer au contrôle

Top Chrono !

Résoudre chacun des exercices suivants en 15 minutes maximum.

112 Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = n^2 - n - 6$.

1. Étudier le sens de variation de (v_n).
2. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $v_n \geqslant 1\,000$.

113 Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme 7 et de raison 2 et (v_n) la suite géométrique de premier terme 3 et de raison 1,15.

1. Déterminer le sens de variation de chacune de ces suites.
2. Déterminer les expressions de u_n et v_n en fonction de n.
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier n_0 tel que $v_n > u_n$.

114 Au 1er janvier 2010, Kim débute dans une entreprise avec un salaire mensuel de 1 500 €. Il est prévu dans son contrat une augmentation mensuelle de 7 € à partir du deuxième mois.
On note $a_0 = 1\,500$ son salaire d'embauche puis a_n son salaire à la fin du $(n+1)^{\text{ième}}$ mois pour n supérieur ou égal à 1.

1. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.
En déduire la nature de la suite (a_n) et l'expression de a_n en fonction de n.
2. Déterminer le rang du premier mois pour lequel son salaire dépassera 2 000 €.

115 Une retenue d'eau artificielle est alimentée par un ruisseau dont le débit diminue de 20 % d'un jour sur l'autre à cause de la chaleur.
Pour la journée du 1er juin, le débit D_0 est égal à 300 m^3 par jour.
On note D_n le débit pour le $n^{\text{ième}}$ jour après le 1er juin.

1. Calculer le débit D_1 pour le 2 juin.
2. Exprimer D_{n+1} en fonction de D_n.
En déduire la nature de la suite (D_n) et l'expression de D_n en fonction de n.
3. Déterminer au bout de combien de temps le débit sera réduit à 30 m^3 par jour.

POUR APPROFONDIR

116 Le chiendent du jardinier

Anastase, jardinier amateur, avait une magnifique pelouse de gazon autour de sa maison. Il habite à la campagne et tous les ans 20 % du gazon est détruit pendant l'été et remplacé par du chiendent.
Chaque année, à l'automne, il arrache 50 m^2 de chiendent et le remplace par du gazon.
Dans tout l'exercice les aires seront exprimées en mètres carrés.

1. La surface initiale de la pelouse a pour aire u_0 et la surface de gazon sans chiendent restant au bout de n années a pour aire u_n.
Montrer que pour tout entier n, on a $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 50$.
2. Sachant que $u_2 = 1\,370$, déterminer l'aire de la surface initiale de la pelouse.
3. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 250$.
Exprimer v_{n+1} en fonction de u_n puis en fonction de v_n.
En déduire que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme v_0 et la raison.
4. Exprimer le terme général de (v_n) en fonction de n, puis u_n en fonction de n.
5. Déterminer le nombre d'années pendant lesquelles Anastase garde plus du quart de sa pelouse.

118 Effectif d'une entreprise

Le 1er janvier 2012, une grande entreprise compte 1 500 employés. Une étude montre que lors de chaque année à venir, 10 % de l'effectif de l'entreprise au 1er janvier partira à la retraite au cours de l'année. Pour ajuster ses effectifs à ses besoins, l'entreprise embauche 100 jeunes dans l'année.

Pour tout entier naturel n, on appelle u_n le nombre d'employés de l'entreprise le 1er janvier de l'année $(2012+n)$.

1. a. Calculer u_0, u_1 et u_2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier les réponses.
b. Expliquer ensuite pourquoi on a, pour tout entier naturel n :
$$u_{n+1} = 0{,}9u_n + 100.$$
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n - 1\,000$.
a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
Préciser sa raison.
b. Exprimer v_n en fonction de n.
En déduire que pour tout entier naturel n :
$$u_n = 500 \times 0{,}9^n + 1\,000.$$
3. Démontrer que pour tout entier naturel n :
$$u_{n+1} - u_n = -50 \times 0{,}9^n.$$
En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
4. Au 1er janvier 2012, l'entreprise compte un sureffectif de 300 employés. À partir de quelle année, le contexte restant le même, l'entreprise ne sera-t-elle plus en sureffectif ?

123 Le club de « Gym »

Dans un village, l'association de gymnastique volontaire comptait 50 adhérents en 2011. Depuis cette date, la trésorière a remarqué qu'elle reçoit chaque année 18 nouvelles adhésions et que 85 % des anciens inscrits renouvellent leur adhésion.
On note a_n le nombre d'adhérents pour l'année $(2011+n)$.
On a donc $a_0 = 50$ et $a_{n+1} = 0{,}85a_n + 18$ pour tout entier naturel n.

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = a_n - 120$ pour tout entier naturel n.
a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
b. Déterminer l'expression de u_n.
c. En déduire que pour tout entier naturel n :
$$a_n = 120 - 70 \times 0{,}85^n.$$
2. Chaque semaine, 60 % des adhérents s'inscrivent pour une heure de gymnastique et 40 % pour deux heures de gymnastique.
a. Exprimer en fonction de n le nombre d'heures de gymnastique pour l'année $(2011+n)$.
b. Une séance de gymnastique dure une heure et est limitée à 20 personnes. On veut déterminer l'année à partir de laquelle l'association devra prévoir plus de 8 séances par semaine.
Démontrer qu'alors n doit vérifier l'inéquation $98 \times 0{,}85^n < 8$.
Conclure en utilisant la calculatrice.