3 Suites géométriques

A Activités

Activité 3 **Placement à intérêts composés**

Etude d'un exemple

Un capital de 2 000 € est placé au taux annuel de 5 % à intérêts composés. Cela signifie que, chaque année, les intérêts sont calculés sur le capital acquis.

On note C_0 le capital initial et C_n disponible au bout de n années.

1. Quel est le coefficient multiplicateur associé à une augmentation de 5 % ?

2. a) Que représente C_1 ? Calculer la valeur de C_1.
   b) Que représente C_2 ? Calculer la valeur de C_2.
   c) Que représente C_{10} ? Déterminer C_{10}.

Généralisation

La suite définie précédemment est une suite géométrique. Nous allons dégager quelques propriétés de ce type de suite.

1. a) Compléter le schéma ci-dessous :

$$\underset{(u_0)}{2000} \xrightarrow{\times 1{,}05} \underset{(u_1)}{2100} \xrightarrow{\ldots} \underset{(\ldots)}{\ldots} \xrightarrow{\ldots} \underset{(\ldots)}{\ldots}$$

b) Compléter :

$C_1 = C_0 \times \ldots\ldots$

$C_2 = C_1 \times \ldots\ldots$

$C_3 = C_2 \times \ldots\ldots$

c) Compléter :

$$u_0 \xrightarrow{\times 1{,}05} u_1 \xrightarrow{\ldots} \ldots \xrightarrow{\ldots} \ldots \quad \wr\wr \quad u_{n-1} \xrightarrow{\ldots} u_n \xrightarrow{\ldots} u_{n+1}$$

Généralisation : $\boxed{u_{n+1} = u_n \times \ldots\ldots}$

ce nombre est appelé la raison de la suite (u_n)

2. a) Compléter le schéma ci-dessous :

$$u_0 \xrightarrow{\times 1{,}05} u_1 \xrightarrow{\ldots} u_2 \xrightarrow{\ldots} u_3$$

$$u_0 \xrightarrow{\ldots} u_3$$

b) Compléter :

$C_3 = C_0 \times \dots\dots$

c) Compléter :

$$\begin{tikzcd} u_0 \arrow[r, "\times 1{,}05"] \arrow[rrrrr, bend right, "\dots"'] & u_1 \arrow[r, "\dots"] & u_2 \arrow[r, "\dots"] & u_3 \quad \wr\wr & u_{n-1} \arrow[r, "\dots"] & u_n \end{tikzcd}$$

Généralisation : $\boxed{C_n = C_0 \times \dots\dots}$

Activité 4 Représentation graphique et sens de variation

❶ En utilisant un tableur, représenter les sept premiers points associés aux suites (u_n) ; (v_n) et (w_n) définies par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = u_n \times 1{,}2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = v_n \times 0{,}9 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} w_0 = 5 \\ w_{n+1} = w_n \end{cases}$$

❷ Conjecturer le sens de variation de chacune des suites précédentes.

❸ Effectuer les calculs suivants :

$\dfrac{u_1}{u_0} = \dots\dots$	$\dfrac{v_1}{v_0} = \dots\dots$	$\dfrac{v_1}{v_0} = \dots\dots$
$\dfrac{u_2}{u_1} = \dots\dots$	$\dfrac{v_2}{v_1} = \dots\dots$	$\dfrac{v_2}{v_1} = \dots\dots$
$\dfrac{u_3}{u_2} = \dots\dots$	$\dfrac{v_3}{v_2} = \dots\dots$	$\dfrac{v_3}{v_2} = \dots\dots$
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dots\dots$	$\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dots\dots$	$\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dots\dots$

Que constatez-vous ?

On dit que la **variation relative** entre deux termes consécutifs de la suite est constante.

B Cours

❶ Définition

Définition

Une **suite** est **géométrique** si l'on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre q, appelé **raison de la suite** :

pour tout entier naturel n, $\boxed{u_{n+1} = u_n \times q}$ où q est la raison de la suite.

Remarque

Une suite géométrique est définie par une formule de récurrence.
La variation relative entre deux termes consécutifs d'une suite géométrique est constante égale à q : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=q$

Schéma

$$u_0 \xrightarrow{\times 9} u_1 \xrightarrow{\times 9} u_2 \ \ldots u_{n-1} \xrightarrow{\times 9} u_n \xrightarrow{\times 9} u_{n+1}$$

▶ Exemple 10 Soit u une suite géométrique de premier terme $u_0=1{,}5$ et telle que $u_{n+1}=u_n\times 2$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Quelle est la raison de cette suite ?

▶ Solution

1. D'après la formule de récurrence,

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0\times 2 \\ &= 1{,}5\times 2 \\ &= 3 \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} u_2 &= u_1\times 2 \\ &= 3\times 2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

2. Comme $u_{n+1}=u_n\times 2$, cette suite géométrique a pour raison 2.

2 Formule explicite

Propriété 1

Soit u une suite géométrique de raison q.

Pour tous entiers naturels n et p, $u_n=u_p\times q^{n-p}$.

En particulier, $u_n=u_0\times q^n$ et $u_n=u_1\times q^{n-1}$.

▶ Exemple 11 Soit u une suite géométrique de premier terme $u_0=5$ et de raison 3.

Calculer u_{10} .

▶ Solution Comme u est une suite géométrique, on a $u_n=u_0\times q^n$ avec $u_0=5$ et $q=3$.

Donc :

$$\begin{aligned} u_{10} &= 5\times 3^{10} \\ &= 295245 \end{aligned}$$

❸ Représentation graphique et sens de variation

Propriété 2

Soit q un réel strictement positif. Soit la suite géométrique définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = q^n$.

Si $0 < q < 1$, la suite géométrique $u_n = q^n$ est strictement décroissante.

Si $q = 1$, la suite géométrique $u_n = q^n$ est constante égale à 1.

Si $1 < q$, la suite géométrique $u_n = q^n$ est strictement croissante.

Démonstration

Soit la suite géométrique définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = q^n$ avec $q > 0$.

Alors, $u_{n+1} - u_n = q^{n+1} - q^n = q^n(q-1)$.

Comme $q > 0$, le signe de $u_{n+1} - u_n$ dépend du signe de $(q-1)$

1^er cas : $0 < q < 1$

$(q - 1) < 0$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$ donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} < u_n$ et ainsi la suite u est une suite strictement décroissante.

2^ème cas : $q = 1$

$(q - 1) = 0$ donc $u_{n+1} - u_n = 0$ donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n$ et ainsi la suite u est une suite constante.

3^ème cas : $1 < q$

$(q - 1) > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$ donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} > u_n$ et ainsi la suite u est une suite strictement croissante.

▶ **Exemple 12**

❶ Soit u une suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et $q= 0,3$.

a) Quel est le sens de variation de cette suite ?

b) Représenter graphiquement les 5 premiers termes de cette suite dans un repère.

❷ Mêmes questions avec la suite géométrique v de premier terme $v_0 = -2$ et $q = 1,2$.

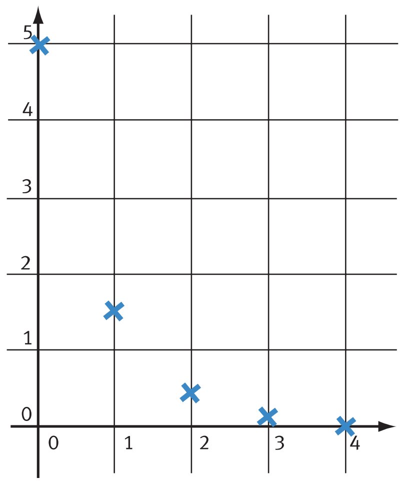
▶ **Solution**

❶ a) Comme u est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et $q = 0,3$, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= u_0 \times q^n \\ &= 5 \times 0,3^n \end{aligned}.$$

Comme $0 < 0,3 < 1$, la suite définie par $a_n = 0,3^n$ est une suite strictement décroissante. Comme $u_n = 5 \times a_n$ et $5 > 0$, la suite u a les mêmes variations que la suite a : u est une suite strictement croissante.

b)



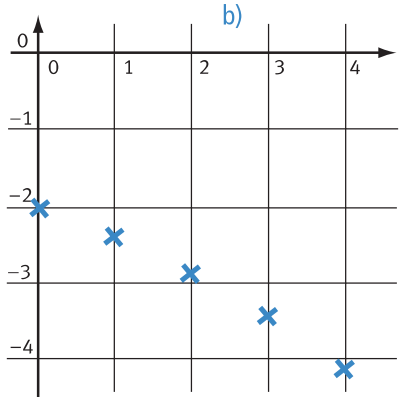
n	0	1	2	3	4
u_n	5	1,5	0,45	0,135	0,0405

❷ a) Comme v est une suite géométrique de premier terme $v_0 = -2$ et $q = 1{,}2$, on a :

$$\begin{aligned} v_n &= v_0 \times q^n \\ &= -2 \times 1{,}2^n \end{aligned}.$$

Comme $1{,}2 > 1$, la suite définie par $b_n = 1{,}2^n$ est une suite strictement croissante. Comme $v_n = -2 \times b_n$ et $-2 < 0$, la suite v a un sens de variation contraire à celui de la suite b : u est une suite strictement décroissante.

b)



n	0	1	2	3	4
v_n	– 2	– 2,4	– 2,88	– 3,456	– 4,1472

Remarque

Pour une suite géométrique, on parle d'évolution exponentielle.

C Tice

❶ Tableur

▶ **Exemple 13** Soit u une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 0{,}5$ et $q = 1{,}1$.

❶ Recopier la page de calculs suivante :

	A	B	C	D	E
1	Rang n	Formule de récurrence u_n	Formule explicite u_n		Raison
2	0	0,5	0,5		1,1

❷ Dans la cellule B3, rentrer une formule de récurrence qui permet d'obtenir les termes de la suite *u* par un « copier-glisser » dans la colonne B. « Copier-glisser » cette formule jusqu'à la cellule B42.

❸ Dans la cellule C3, rentrer une formule explicite qui permet d'obtenir les termes de la suite *u* par un « copier-glisser » dans la colonne C. « Copier-glisser » cette formule jusqu'à la cellule C42.

❹ Représenter graphiquement les termes de la suite. (Utiliser les colonnes A et B).

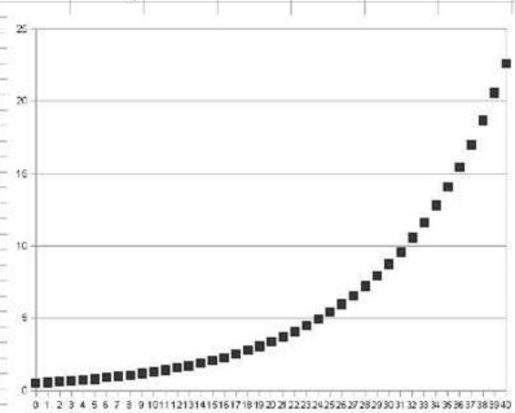
▶ **Solution**

❷ Comme $u_{n+1} = u_n \times q$, on rentre : B3=B2*E$2

❸ Comme $u_n = u_0 \times q^n$, on rentre : C3=C$2*E$2^A2

❹

	A	B	C	D	E
1	Rang n	Formule de récurrence u_n	Formule explicite u_n		Raison
2	0	0,5	0,5		1,1
3	1	0,55	0,55		
4	2	0,61	0,61		
5	3	0,67	0,67		
6	4	0,73	0,73		
7	5	0,81	0,81		
8	6	0,89	0,89		
9	7	0,97	0,97		
10	8	1,07	1,07		
11	9	1,18	1,18		
12	10	1,3	1,3		
13	11	1,43	1,43		
14	12	1,57	1,57		
15	13	1,73	1,73		
16	14	1,9	1,9		
17	15	2,09	2,09		
18	16	2,3	2,3		
19	17	2,53	2,53		
20	18	2,78	2,78		
21	19	3,06	3,06		
22	20	3,36	3,36		
23	21	3,7	3,7		
24	22	4,07	4,07		
25	23	4,48	4,48		
26	24	4,92	4,92		
27	25	5,42	5,42		
28	26	5,96	5,96		
29	27	6,55	6,55		
30	28	7,21	7,21		
31	29	7,93	7,93		
32	30	8,72	8,72		
33	31	9,6	9,6		
34	32	10,56	10,56		
35	33	11,61	11,61		
36	34	12,77	12,77		
37	35	14,05	14,05		
38	36	15,46	15,46		
39	37	17	17		
40	38	18,7	18,7		
41	39	20,57	20,57		
42	40	22,63	22,63		



Remarque

On obtient bien sûr les mêmes résultats dans les colonnes B et C.

❷ Calculatrice

Pour obtenir les termes d'une suite géométrique à l'aide de la calculatrice, on peut utiliser la formule explicite d'une suite géométrique et la **table de valeurs** de la calculatrice.

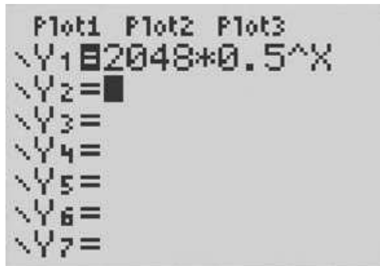
▶ Exemple 12 Soit u une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2048$ et de raison $q = 0{,}5$.

Afficher sur une calculatrice les vingt premiers termes de cette suite.

▶ Solution La suite u est définie explicitement par $u_n = 2048 \times 0{,}5^n$.

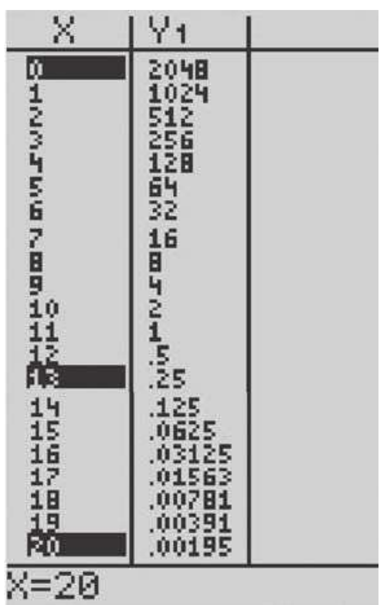
Texas Instrument

Renseigner « f(x) = »



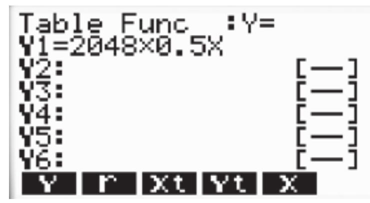
Renseigner DefTable

Afficher la Table



Casio

Renseigner « Table – Func »



Renseigner « Table – Tabl » et afficher la Table (la faire défiler)