A. Généralités sur les fonctions

I) Fonction

Définition : Définir une fonction sur un intervalle [a ; b], c'est donner un procédé qui, à chaque nombre x de l'intervalle [a ; b], fait correspondre au plus un nombre noté f (x).
On dit que x a pour image f (x) par la fonction f et que x est un antécédent de f (x) par la fonction f.

Exemple 1 : soit la fonction $f : x \mapsto f(x) = x^2 + 5$.

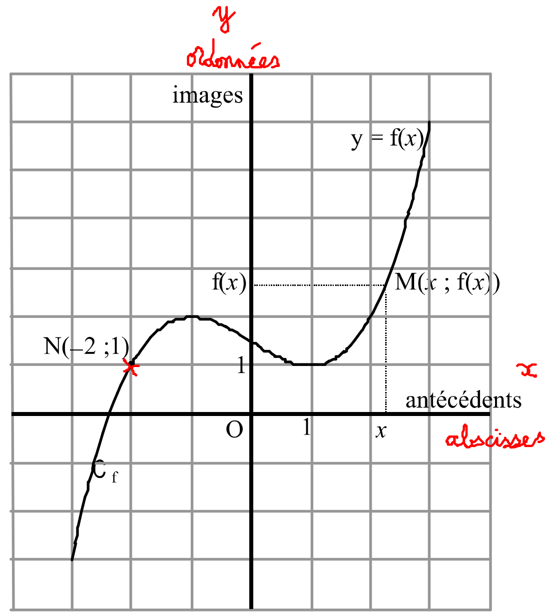
f (3) = $3^2 + 5 = 14$ donc 3 a pour image 14 par la fonction f.

3 est un antécédent de 14 par f
−3 est également un antécédent de 14 par f.

f (a) = 21 donc a est un antécédent de 21 par f.
$f(a) = 21 \iff a^2 + 5 = 21 \iff a^2 = 16 \iff a = 4$ ou $a = -4$

II) Représentation graphique

Définitions : Soit f une fonction définie sur l'intervalle [a ; b].
• La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ ou courbe représentative de f dans un repère est l'ensemble des points de coordonnées $(x ; f(x))$ où x est dans l'intervalle [a ; b].
• La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de f a alors pour équation $y = f(x)$.



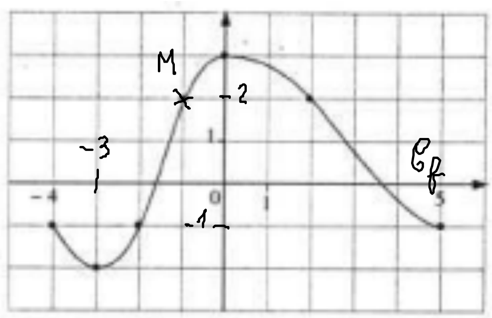
Conséquences :
① Un nombre x et son image $f(x)$ sont représentés par le point M de coordonnées (x ; $f(x)$).
② Les valeurs x se représentent en abscisses.
③ Les valeurs de $f(x)$ se représentent en ordonnées.
④ Dire qu'un point M de coordonnées (x_M ; y_M) appartient à $\mathscr{C}_f$ revient à dire que son ordonnée y_M est égale à l'image de son abscisse x_M par f, soit $y_M = f(x_M)$.

Sur la figure ci-contre, la fonction f est définie sur l'intervalle

Le point N(−2 ; 1) appartenant à C_f, on a : f(−2) = 1

Exemple 2:
La fonction f représentée ci-contre est définie sur l'intervalle

[−4 ; 5]



$\mathscr{C}_f$ a pour équation $y = f(x)$

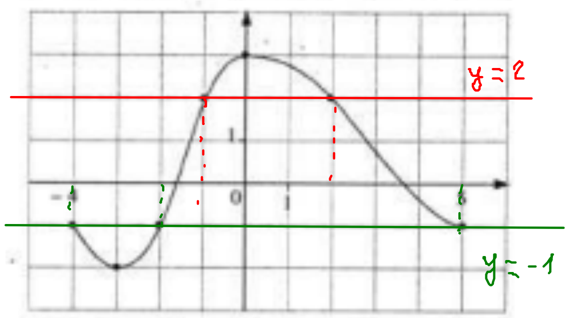
Lecture d'images

M(−1 ; 2) ∈ $\mathscr{C}_f$ donc f (−1) = 2

−1 a pour image 2 par f

5 a pour image −1 par f

Lecture d'antécédents



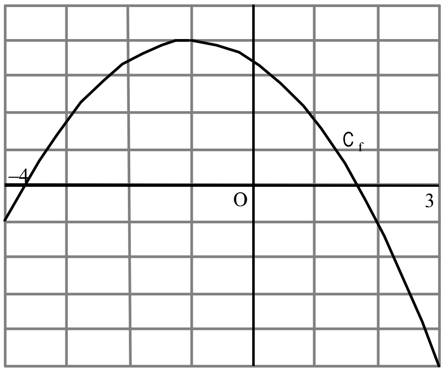
2 a pour antécédents −1 et 2 par f

−1 a pour antécédents −4 ; −2 et 5 par f

III) Variations ; extremum

1) Fonction croissante

Définition : Dire que f est une fonction croissante sur l'intervalle I signifie que pour tous réels a et b de I :
si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$



Remarque : Lorsque les valeurs de x augmentent, les valeurs de f(x) augmentent. une fonction croissante conserve l'ordre

2) Fonction décroissante

Définition : Dire que f est une fonction décroissante sur l'intervalle I signifie que pour tous réels a et b de I :
si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$

Remarque : Lorsque les valeurs de x augmentent, les valeurs de f(x) diminuent. une fonction décroissante change l'ordre

Exemple : La fonction f de l'exemple 2 est décroissante sur l'intervalle [– 4 ; – 3] puis ...croissante sur... l'intervalle [-3 ; 0] puis décroissante sur l'intervalle [0 ; 5]...

Tableau de variation de la fonction f :

x	-4		-3		0		5
$f(x)$	-1	↘	-2	↗	3	↘	-1

Extremums :

Sur l'intervalle [...-4...; ...5...] la fonction f admet un maximum pour x = ...0... . Ce maximum vaut f (...0...) = ...3...

Sur l'intervalle [...-4...; ...5...] la fonction f admet un minimum pour x = ...-3... Ce minimum vaut... $f(-3) = -2$...

IV) Résolution d'équations et d'inéquations

1) Résolution graphique

Méthode :
- f(x) = k quand la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe la droite horizontale d'équation
- f(x) ⩽ k quand la courbe $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de la droite horizontale d'équation
- f(x) = g(x) quand la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe la courbe $\mathscr{C}_g$
- f(x) ⩽ g(x) quand la courbe $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$.

Cas particuliers :
- f(x) = 0 quand la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses.
- f(x) ≤ 0 quand la courbe $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de l'axe des abscisses.

Remarque : Résoudre l'équation f(x) = k revient à déterminer l'antécédent de k par la fonction f.

Exemple 3 : Soit f la fonction de l'exemple 2 représentée ci-contre.

déterminer le ou les antécédents éventuels de 2 par f

f(x) = 2 pour x = -1 ou pour $x = 2$

$f(x) = 2$: $S = \{-1 ; 2\}$

f(x) ⩾ 2 pour x ∈ $[-1 ; 2]$

$f(x) \geqslant 2 \iff x \in [-1 ; 2]$

$f(x) \geqslant 2$: $S = [-1 ; 2]$

f(x) = 0 pour x = $-1,5$ ou $x = 3,5$

$f(x) = 0 \iff x \in \{-1,5 ; 3,5\}$

$f(x) = 0$: $S = \{-1,5 ; 3,5\}$

f(x) ⩽ 0 pour x ∈ $[-4 ; -1,5] \cup [3,5 ; 5]$

$f(x) \leqslant 0 \iff x \in [\ ...\ ] \cup [\quad]$

$f(x) \leqslant 0$: $S = [\ ;\ ] \cup [\ ;\ ]$

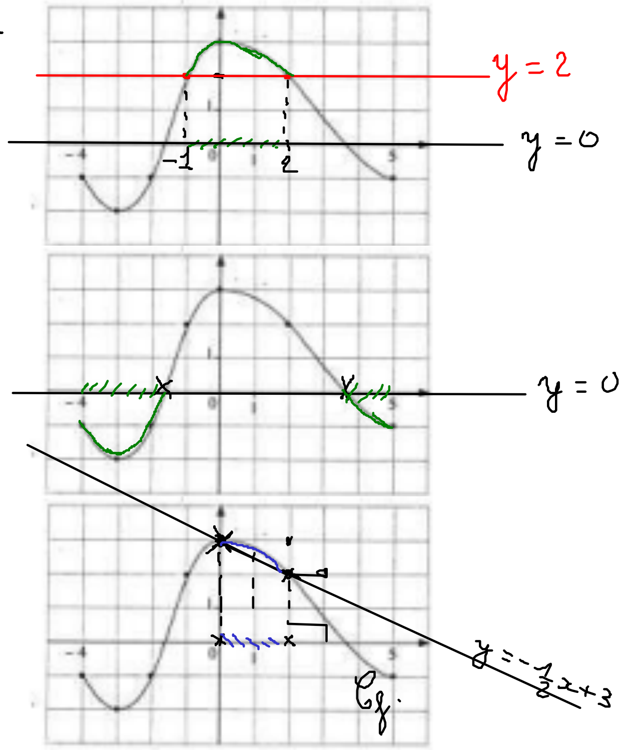
$f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ pour x = 0 ou $x = 2$

$f(x) = -\frac{1}{2}x + 3 \iff x \in \{0 ; 2\}$

$-\frac{1}{2} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$f(x) \geqslant -\frac{1}{2}x + 3$ pour x ∈ $[0 ; 2]$

$f(x) \geqslant -\frac{1}{2}x + 3 \iff x \in [0 ; 2]$



2) Existence et unicité de la solution de l'équation f(x) = k

Propriété : Si f est continue strictement croissante / monotone sur [a ;b] et si k appartient à l'intervalle (image) [f(a) ; f(b)] alors l'équation f(x) = k admet une solution unique α dans l'intervalle [a ;b].

x	…	a	α	b	…
Variation de f	…	f(a) ↗	k	f(b)	…

Remarques : ① Cette propriété permettra de résoudre numériquement des équations que l'on ne sait pas résoudre algébriquement.
② On a un énoncé analogue pour le cas d'une fonction strictement décroissante sur [a ; b].

V) Signe de la fonction f

Méthode :

- f(x) est positif (est de signe +) quand la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de l'axe des abscisses.
- f(x) est négatif (est de signe –) quand la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de l'axe des abscisses.

Exemple 4 : Soit f la fonction représentée ci-contre.

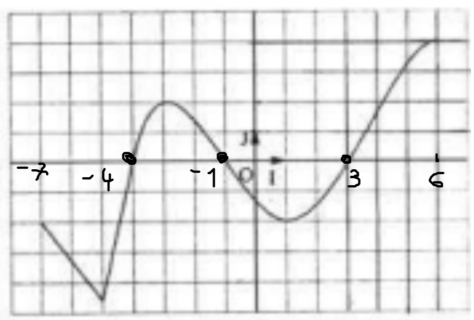


Tableau de signe de la fonction f :

x	-7		-4		-1		3		6
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	