Généralités sur les fonctions

Chapitre 4

Classe de $1^{ère}$ ES

I- Notion de fonction

1- Définitions

a- vocabulaire des fonctions

Soit un ensemble de nombre $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$. On définit une fonction f sur *D* lorsqu'à chaque réel x de $\mathcal{D}$, on associe un unique réel y.

On note $f : x \mapsto y$ ou $y = f(x)$.

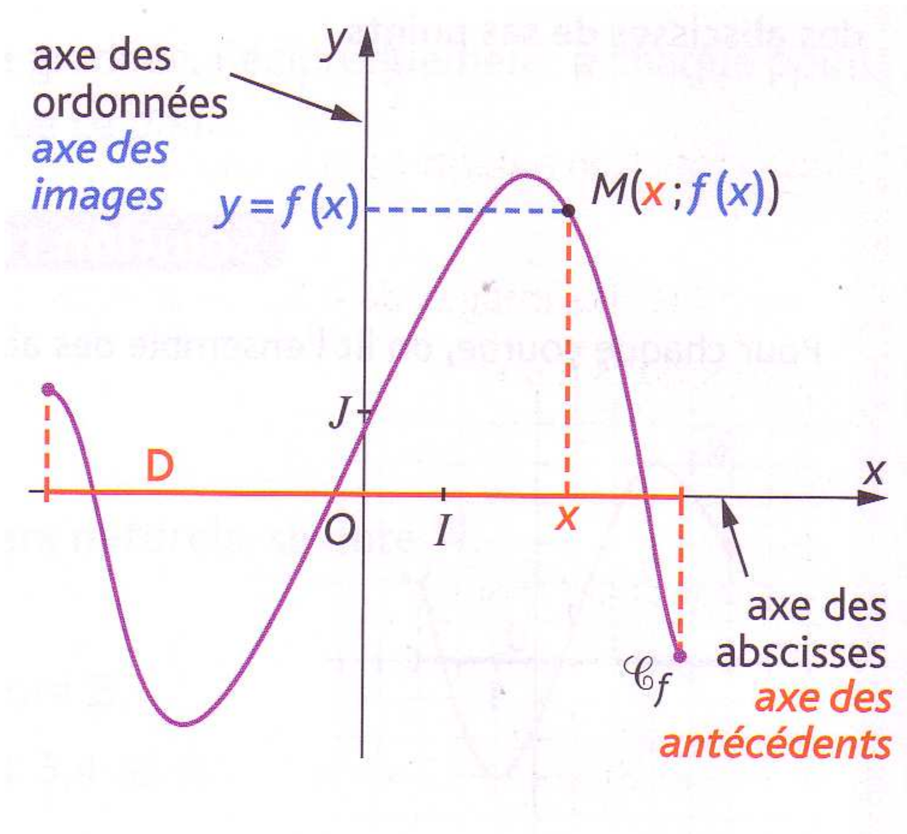
D est appelé ensemble de définition de la fonction f; x est la variable.

$f(x)$ est l'image de x par f.

Quand on sait que y= $f(x)$, on dit que x est **un** antécédent de y par f.

b- courbe représentative

Soit un repère du plan. On appelle courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f, l'ensemble des points M de coordonnées $(x;y)$ où : $\begin{cases} x \in \mathcal{D} \\ y = f(x) \end{cases}$



Remarques :

1- chaque réel x de $\mathcal{D}$ a une seule image.

2- Chaque réel y peut avoir plusieurs antécédents, ou ne pas avoir d'antécédent.

3- Une fonction f définie sur $\mathcal{D}$ peut être donnée de trois façons:

I- Généralités sur les fonctions

4- Résolution graphique d'équations ou d'inéquations

a- Equation $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$

Soit f une fonction et k un réel. On note $\mathcal{C}_f$ *la* courbe représentative de f dans un repère.

Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = k$ revient à déterminer les **antécédents** de k par la fonction f, cela revient donc à trouver les abscisses de tous les points de la courbe ayant une ordonnée égale à k.

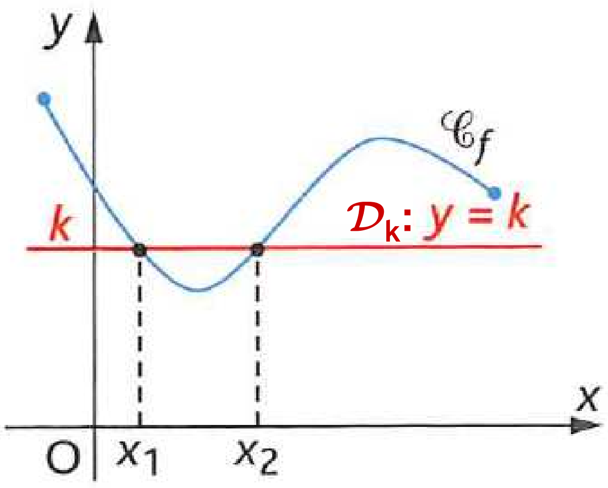
Méthode :

Pour cela, on trace la frontière représentée par **la droite horizontale** $\mathcal{D}_k$ **d'équation** $y=k$ *(droite parallèle à l'axe des abscisses)*;

il y a autant d'antécédents (ou de **solutions** de l'équation) que de points d'intersection entre la courbe et la droite :

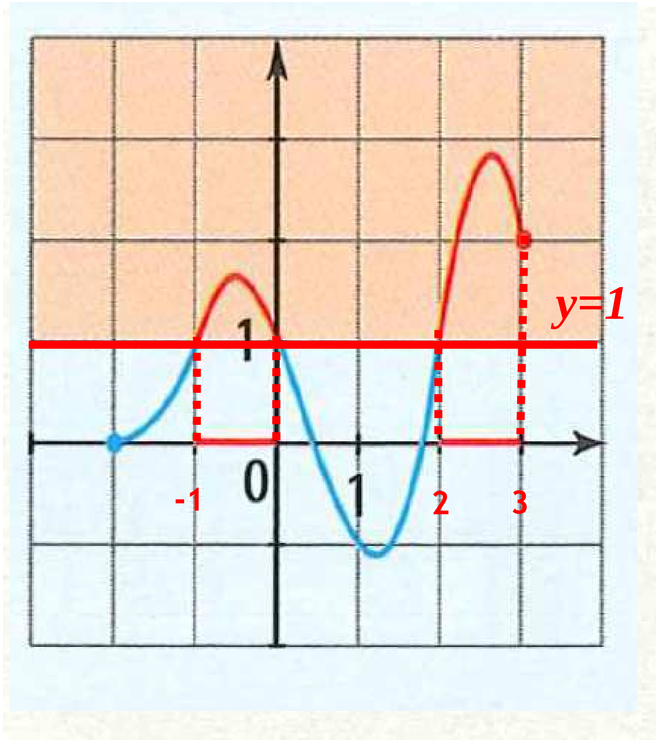
les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont les **abscisses** des points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}_k$.

Sur le graphique ci-contre, l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = k$ est $\mathcal{S} = \{ x_1 ; x_2 \}$



b- inéquation du type f(x)<k ou f(x)>k

➢Résoudre graphiquement une inéquation du type $f(x)<k$ (resp. $f(x)>k$)consiste à déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ qui sont situés en dessous (resp. au dessus) de la frontière représentée par **la droite horizontale d'équation *y=k***.



Comme l'inégalité est stricte, les points communs sont exclus de l'ensemble des solutions.

En revanche, si l'inégalité est large, les abscisses des points d'intersection font partie de l'ensemble des solutions.

On rédige de la façon suivante :

$f(x)>1$: $\mathcal{S}$=] -1 ; 0 [U]2;3]

$f(x) \leq 1$: $\mathcal{S}$=[-2;-1] U [0; 2]

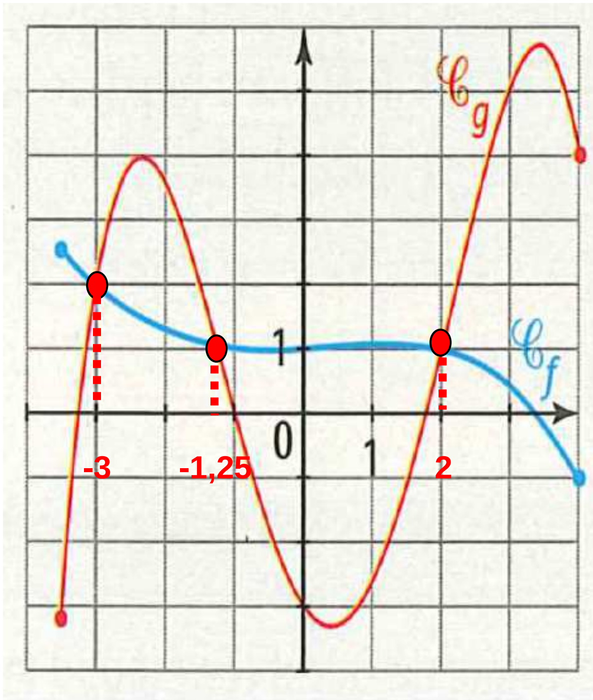
c- Equation du type $f(x)=g(x)$

Dans un précédent paragraphe, nous avons vu comment résoudre graphiquement une équation du type $f(x)=k$

Soit f et g deux fonctions dont les courbes représentatives dans un repère sont respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

➢Résoudre graphiquement une équation du type $f(x)=g(x)$ consiste à déterminer les abscisses des points communs à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Il y a autant de solutions à l'équation que de points d'intersection entre les deux courbes : les solutions sont les abscisses de ces points.



On rédige de la façon suivante :

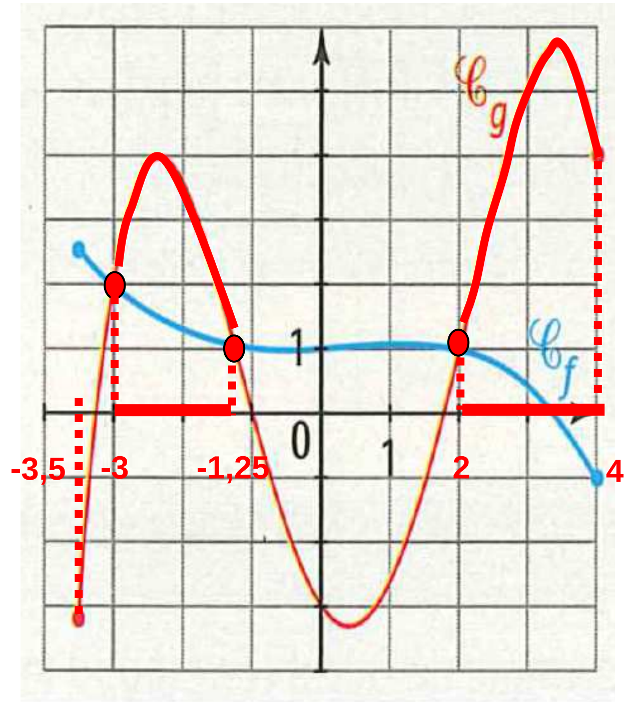
$f(x)=g(x)$: $\mathcal{S}=\{-3;-1,25;2\}$

d- Inéquation du type f(x)<g(x) ou f(x)>g(x)

- Résoudre graphiquement une inéquation du type *f(x)<g(x)* (resp. *f(x)>g(x)*)consiste à déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ qui sont situés en dessous de $\mathcal{C}_g$ (resp. au dessus)

Comme l'inégalité est stricte, les points communs sont exclus de l'ensemble des solutions.

En revanche, si l'inégalité est large, les abscisses des points d'intersection font partie de l'ensemble des solutions.



On rédige de la façon suivante :

$g(x)>f(x)$: $\mathcal{S}$=]-3;-1,25 [U]2;4]

$g(x) \leq f(x)$: $\mathcal{S}$=[-3,5;-3] U [-1,25; 2]

5- Tableau de signe d’une fonction

Dresser le tableau de signe d’une fonction consiste à résumer dans un tableau les intervalles sur lesquels la fonction est positive, nulle ou négative.

L’axe des abscisses est la droite d’équation y = 0

Lorsque la courbe est située au dessus de l’axe des abscisses on a $f(x) > 0$

Lorsque la courbe rencontre l’axe des abscisses, on a $f(x)=0$

Lorsque la courbe est située en dessous de l’axe des abscisses on a $f(x)<0$

➢Sur le graphique qui nous a été donné précédemment, on peut lire que :

la fonction *f* est positive sur [-3;2,5[

ensuite, $f(-2,5)=0$,

puis *f* est négative sur]-2,5;-0,25[; ensuite $f(-0,25)=0$;

puis *f* est positive sur [-0,25;4]

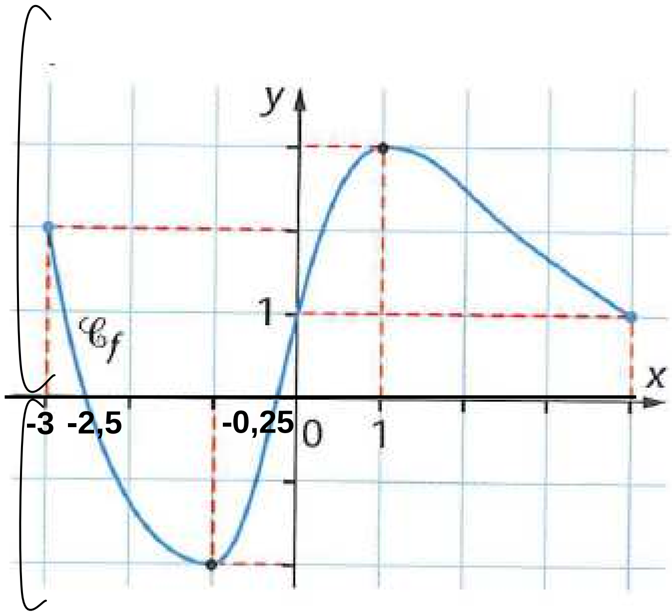


Tableau de signe de la fonction *f*

x	-3		-2,5		-0,25		4
$f(x)$		+	0	—	0	+	

II- Etude d'une fonction

1- sens de variation d'une fonction

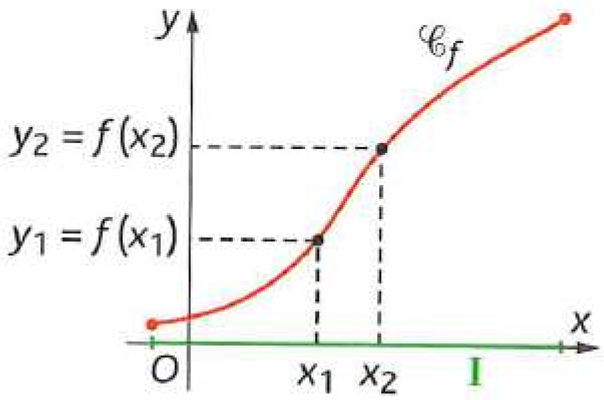
a) Dire qu'une fonction est croissante sur un intervalle I signifie que lorsque la variable augmente dans l'intervalle I, l'image augmente aussi.

Définition : La fonction f est croissante sur l'intervalle I lorsque pour tous réels x_1 et x_2 de I :

Si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$

On dit que la fonction f conserve l'ordre:

les réels de l'ensemble I et leurs images par f sont rangés dans le même ordre



La courbe représentative de f « monte » de la gauche vers la droite.

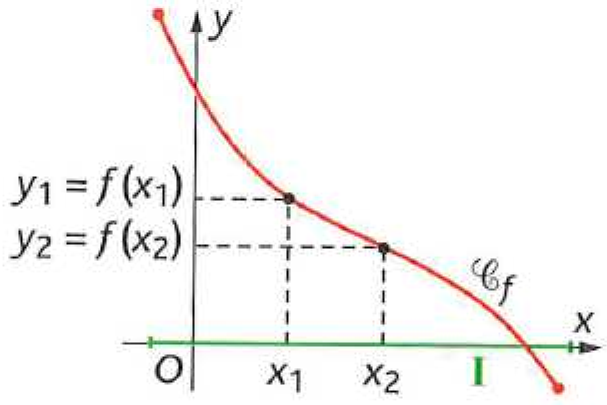
b) Dire qu'une fonction est **décroissante sur un intervalle I** signifie que lorsque la variable augmente dans l'intervalle I, l'image diminue.

Définition : La fonction f est décroissante sur l'intervalle I lorsque pour tous réels x_1 et x_2 de I :

Si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \geq f(x_2)$

On dit que **la fonction f change l'ordre**:

les réels de l'ensemble I et leurs images par f sont rangés dans un ordre contraire.



La courbe représentative de f « descend » de la gauche vers la droite.

❖Dire qu'une fonction est **constante sur un intervalle I** signifie que tous réels x_1 et x_2 de I : $f(x_1) = f(x_2)$

Sa représentation graphique est segment horizontal.

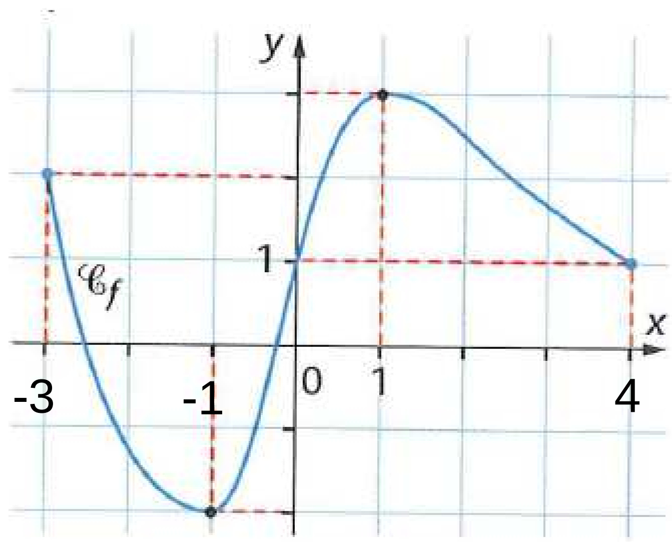
c) Méthode pour justifier un sens de variation:

Pour étudier le sens de variation d'une fonction f sur un intervalle I donné, on considère 2 réel quelconques x_1 et x_2 de I, tels que $x_1 < x_2$ et on cherche à comparer leurs images par la fonction :

d- Monotonie

❖Dire qu'une fonction est **monotone sur un intervalle I** signifie que f est soit uniquement croissante sur I, soit uniquement décroissante sur I .

➢Par exemple, la fonction dont le graphique est présenté ci-contre n'est pas monotone sur [-3;4] :



en effet,

f est décroissante sur [-3;-1] et sur [1;4] ;

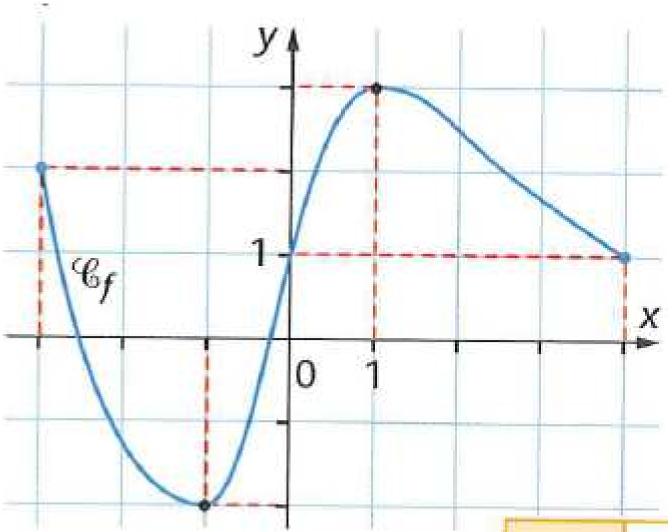
f est croissante sur [-1;1]

Le sens de variation de f sur [-3;4] est donc multiple : f n'est pas monotone sur cet intervalle.

2- Tableau de variation

On résume le sens de variation d’une fonction par un **tableau de variation.**

Exemple : f est définie sur [-3;4] par :



Le tableau de variation de f est :

x	-3		-1		1		4
$f(x)$	2	↘	-2	↗	3	↘	1

Ensemble de définition et réels où la fonction f change de sens de variation (*abscisses, rangées dans l’ordre*).

- Une flèche montante quand la fonction f est croissante.
- Une flèche descendante quand la fonction f est décroissante.
- En bout de flèches : les images associées (*ordonnées*).

3- Extrema

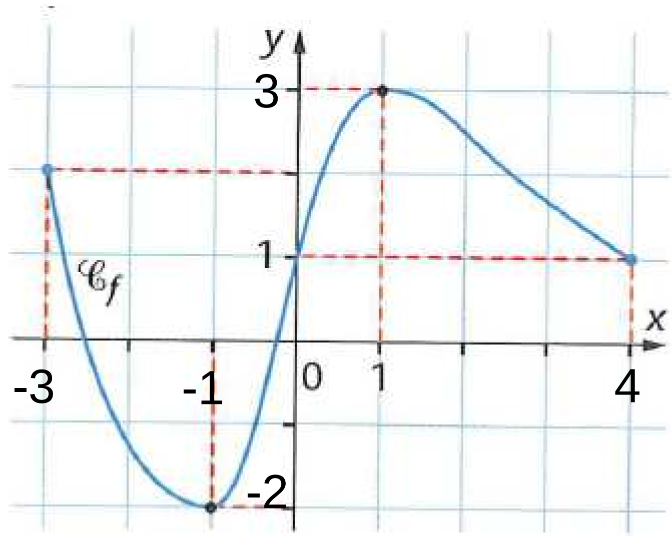
Un extremum est une valeur **localement** **maximale ou minimale**.

•Le maximum M d'une fonction f sur un intervalle I, s'il existe, est la plus grande valeur possible des images, atteinte par un réel a de I tel que $f(a)$=M

Ainsi pour tout réel x de I, on a: $f(x) \leq$ M ou encore $f(x) \leq f(a)$

•Le minimum d'une fonction f sur un intervalle I, s'il existe, est la plus petite valeur possible des images, atteinte par un réel b de I tel que.

Ainsi pour tout réel x de I, on a: $f(x) \geq$ m ou encore $f(x) \geq f(b)$



Dans l'exemple précédent, le maximum de f est 3; il est atteint pour x= 1 (ou « en 1 »)

le minimum de f est -2 ; il est atteint en -1 .