EXERCICE 4. Intersection de deux courbes

Soient f et g les fonctions définies par $f(x) = 2 - \dfrac{1}{2+x}$ et $g(x) = x + 2$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f et $\mathcal{D}$ celle de g.

① Quel est l'ensemble de définition de f ? Celui de g ?

② Dire si $A(-\frac{3}{2};0)$ et $B(4;1{,}83)$ sont sur $\mathcal{C}$. Justifier par un calcul.

③ Conjecturer les coordonnées des points d'intersections des courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

④ Expliquer pourquoi $M(x;y) \in \mathcal{C}$ si et seulement si $2 - \dfrac{1}{2+x} = x + 2$.

⑤ Montrer que cette équation équivaut à $x^2 + 2x + 1 = 0$, puis la résoudre au moyen d'une identité remarquable. Valider la conjecture de la question ③

D_f est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ existe.

Méthode : on cherche les éventuelles valeurs interdites.

les valeurs interdites sont telles que

$x+2=0 \iff x=-2$ est V. I.

graphiquement, la droite verticale d'équation $x=-2$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$

1) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2\} =]-\infty;-2[\,\cup\,]-2;+\infty[$

$-\infty$ $\quad -2 \quad$ $+\infty$

$D_g = \mathbb{R}$ car g est une fonction affine.

2) $A \in \mathcal{C}_f \iff y_A = f(x_A)$

or $f(x_A) = f(-1{,}5) = 2 - \dfrac{1}{2-1{,}5} = 2 - \dfrac{1}{0{,}5}$

$= 0 = y_A$

$B \in \mathcal{C}_f \iff y_B = f(x_B)$

or $f(x_B) = f(4) = 2 - \dfrac{1}{2+4} = \dfrac{2}{1} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{11}{6} \simeq 1{,}83$

$\neq 1{,}83$

$f(x_B) \neq y_B$ donc $B \notin \mathcal{C}_f$.

3) Soit M le point éventuel d'intersection entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

graphiquement, on a $M(-1;1)$

4) $M(x;y) \in \mathcal{C}_f \iff y = f(x)$

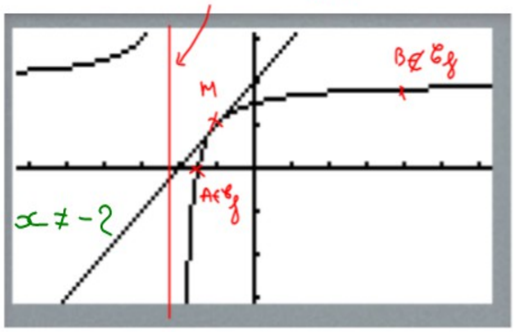
$M(x;y) \in \mathcal{D} \iff y = g(x)$

donc $f(x) = g(x)$

$2 - \dfrac{1}{2+x} = x + 2$

5) $f(x) = g(x) \iff \cancel{2} - \dfrac{1}{2+x} = x + \cancel{2}$

$x=-2$: asymptote verticale



$\iff \dfrac{-1}{2+x} = \dfrac{x}{1}$

$\iff -1 \times 1 = x(2+x)$ avec $x \neq -2$

$\iff -1 = 2x + x^2$

$\iff x^2 + 2x + 1 = 0$

$\iff (x+1)^2 = 0 \iff x+1=0 \iff x=-1.$

$x_M = -1 \qquad y_M = g(x_M) = -1+2 = 1$

$M(-1;1)$