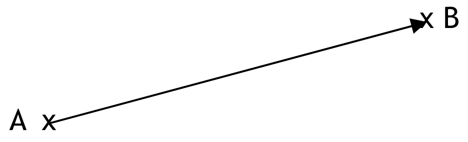
Chap 7 : Vecteurs dans le plan

I- Notion de vecteur

1- Définition : translation

Soient A et B deux points distincts du plan, on appelle translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ la transformation du plan qui déplace le point A en B par glissement, sans rotation.



2- Caractérisation d'un vecteur

a) Définition : *Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un objet mathématique caractérisé par :*
- *sa direction : la droite (AB)*
- *son sens : de A vers B*
- *sa longueur (ou norme) : la longueur du segment [AB]*

b) Vocabulaire:
- Le point A est appelé ***origine*** du vecteur $\overrightarrow{AB}$;
- Le point B est appelé ***extrémité*** du vecteur $\overrightarrow{AB}$;

Tout vecteur ayant son extrémité confondue avec son origine est appelé ***vecteur nul*** et est noté $\vec{0}$.
On a : $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$

c) Notations :
- Les vecteurs sont souvent notés par $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$...
- La norme d'un vecteur $\vec{u}$ est notée $\|\vec{u}\|$

3- Vecteurs égaux

a) Définition : *Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont :*
- *même direction (leurs droites support sont parallèles)*
- *même sens (ils sont orientés dans le même sens)*
- *même longueur (même norme)*

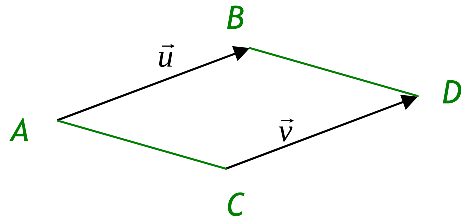
b) Vocabulaire : représentant d'un vecteur

On considère un vecteur $\vec{u}$. Le vecteur $\vec{u}$ n'est pas fixe, on peut le dessiner n'importe où sur une feuille : il admet une infinité de représentants.

c) Propriété importante :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de représentants respectifs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$

ABDC est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$



Conséquence : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si [AD] et [BC] ont même milieu

d) Remarque :

- $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ si et seulement si *A*=*B*
- *Si on fixe un point O, alors pour tout vecteur* $\vec{u}$, il existe un unique point *M* vérifiant $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$

4- Vecteurs opposés

a) Définition : *Deux vecteurs sont opposés si et seulement si ils ont :*
- *même direction*
- *des sens contraires*
- *même longueur*

b) caractérisation :

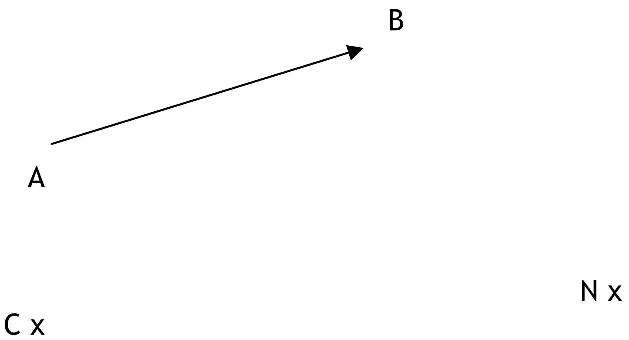
Le vecteur **opposé au vecteur** $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur associé à la translation qui transforme B en A : on le note donc $\overrightarrow{BA}$, **et on a** $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

METHODES :

M 1- Construire un représentant d'un vecteur

Enoncé : a) Construire le représentant d'origine C du vecteur $\overrightarrow{AB}$ **en utilisant un milieu.**

b) Construire le représentant d'extrémité N du vecteur $\overrightarrow{AB}$ **en utilisant le compas.**



<u>Explications :</u>

- Nommons D l'extrémité du vecteur cherché.

On a alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

On en déduit que les segments [AD] et [AC] ont même milieu I.

- Nommons M l'origine du vecteur cherché.

On a alors $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$

On en déduit que ABNM est un parallélogramme. Par conséquent :

d'une part AB = MN ; d'autre part AM = BN

M 2- Placer un point défini par une égalité vectorielle
Enoncé :
ABC est un triangle quelconque. Construire les points M et N vérifiant :
$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{BC}$.

C x

x B

A x

<u>Explications :</u>

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AC}$ équivaut à BMCA est un parallélogramme.

$\overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{BC}$ donc on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont même direction ; par conséquent, les points B, N et C sont alignés.
Or, les vecteurs $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont de même norme et se sens opposé, donc le point N est le symétrique du point C par rapport à B.

II- Somme de vecteurs

1- addition de vecteurs « bout à bout » : relation de Chasles

Pour tous points A, B, C du plan, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
Pour tout point M du plan, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$

Soit $\vec{u}$ un vecteur représentant le vecteur $\overrightarrow{AB}$; $\vec{v}$ un vecteur représentant le vecteur $\overrightarrow{BC}$; $\vec{w}$ un vecteur représentant le vecteur $\overrightarrow{AC}$:

La translation de vecteur $\vec{u}$ amène le point A en B ;
La translation de vecteur $\vec{v}$ amène le point B en C ;
La translation de vecteur $\vec{w}$ amène le point A en C ;

x C

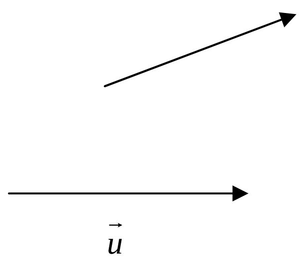
A x x B

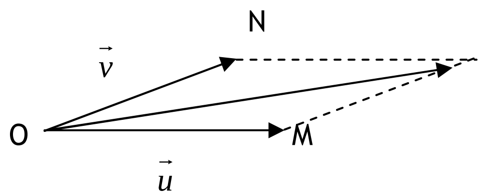
La transformation résultant de la succession de la translation de vecteur $\vec{u}$ puis de la translation de vecteur $\vec{v}$, est la translation de vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.

2- addition de vecteurs de même origine : règle du parallélogramme

Le vecteur obtenu en effectuant la somme de 2 vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ayant la même origine est un vecteur de même origine, dont l'extrémité est l'extrémité de la diagonale du parallélogramme ayant pour côtés consécutifs les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

Si $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$ alors $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OP}$ avec P tel que OMPN est un parallélogramme.

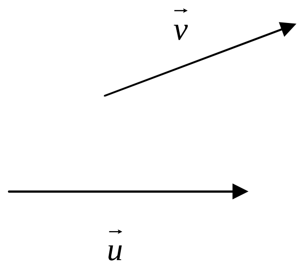


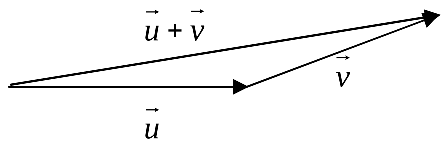


Méthode : On a choisi un représentant $\overrightarrow{OM}$ du vecteur $\vec{u}$ et un représentant $\overrightarrow{ON}$ du vecteur $\overrightarrow{ON}$.

3- addition de vecteurs en configuration quelconque : construction

Pour construire géométriquement la somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on place bout à bout 2 vecteurs représentants des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:



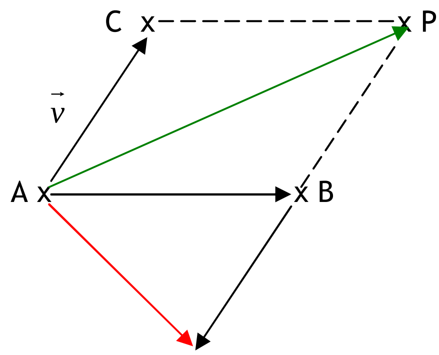


METHODES

M 3 - Construire un représentant d'une somme ou d'une différence de vecteurs.

Enoncé :

ABC est un triangle quelconque. On pose $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$. Construire les points P et Q tels que $\overrightarrow{AP}=\vec{u}+\vec{v}$ et $\overrightarrow{AQ}=\vec{u}-\vec{v}$.



- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ayant la même origine, on applique la règle du parallélogramme :
  $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow$ ABPC est un parallélogramme.

- Tout d'abord, d'après la relation de Chasles on a :
  $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ}$
- Or $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$
- Donc, pour placer le point Q, il suffit donc de construire le vecteur $-\vec{v}$ à partir de l'origine B.

M 4 - Simplifier des expressions vectorielles.

Enoncé : A, B, C et D étant des points quelconques, donner l'expression simplifiée du vecteur $\vec{S}$ défini par : $\vec{S}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

- On commence par éliminer les soustractions : $\vec{S}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BD}$

- On modifie éventuellement l'ordre des termes afin de faire apparaître des vecteurs « bout-à-bout » : $\vec{S}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}$

- On applique la relation de Chasles : $\vec{S}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$