Chapitre 6 : Géométrie dans l'espace

Activité : Vérifier les acquis (n°1, 2, 6 page 22)

<u>I- Représentations planes de solides</u>

1- règles de représentations en perspective cavalière

a) les segments visibles sont dessinés en traits pleins, les autres sont en pointillés.

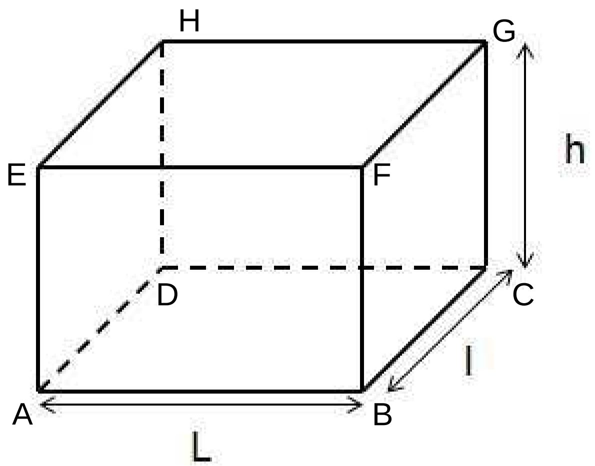
b) un plan frontal est un plan vu de face. Les représentations des figures situées dans les plans frontaux sont en vraies grandeurs sans changer la forme.

c) la perspective cavalière conserve le parallélisme ainsi que les rapports de longueurs (en particulier, elle conserve les milieux, et l'alignement).

d) une fuyante est une droite perpendiculaire à un plan frontal. L'angle que font sur un dessin les fuyantes avec une droite horizontale est constant. On l'appelle angle de fuite. Sur les fuyantes, les longueurs sont multipliées par un nombre constant *k*, appelé coefficient de réduction.

Application : exercice n°8 ;

Exemple : représentation en perspective cavalière d'un parallélépipède rectangle ABCDEFGH tel que AB=5cm ; AD=2cm ; AE= 3,5cm selon un angle de fuite de 45°, avec un coefficient de 0,7



Le parallélépipède est nommé ABCDEFGH, cela signifie que ABCD est l'une de ses faces, que EFGH est la face opposée, et que les segments [AE] ; [BF], [CG] et [DH] sont des arrêtes.

<u>Exercice n°9</u>

2- Les patrons d'un solide

Un patron d'un solide est obtenu en plaçant toutes ses faces dans un même plan.

exercice n°1

Activité : construire un patron

ABCDEF est un parallélépipède rectangle tel que AB=3,5cm ; AD=2,5cm et AE=2cm. Faire un schéma. Représenter la pyramide ABDE et construire son patron en expliquant la construction.

Est-ce le seul patron possible ?

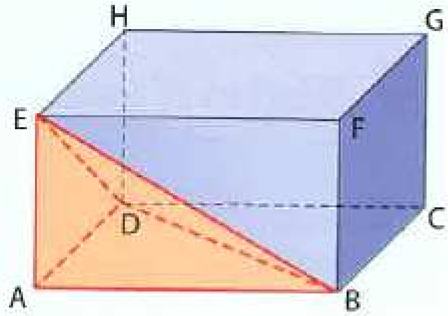
Énoncé

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que :

AB = 3,5 cm ; AD = 2,5 cm et AE = 2 cm.

Construire un patron de la pyramide ABDE.

Expliquer la construction.

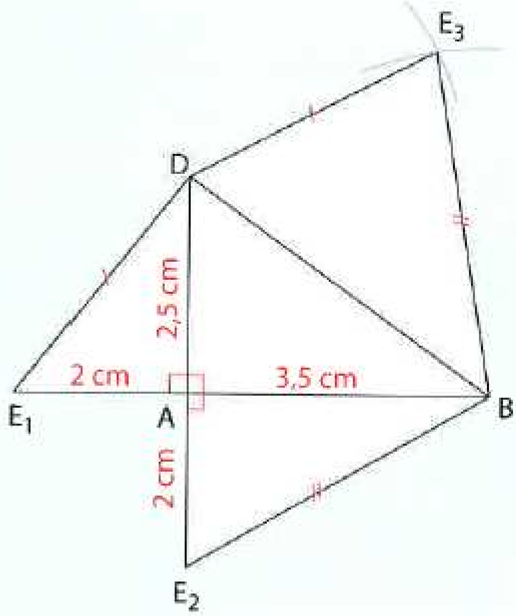


Solution

- Les faces ABCD, ABFE et ADHE sont des rectangles, donc les triangles ABD, ADE et ABE sont des triangles rectangles en A. On les dessine en vraie grandeur dans le plan de la face ABD, par exemple ; on obtient ci-contre les triangles ABD, AE_1D et ABE_2.
- On dessine alors en vraie grandeur le triangle BDE en plaçant, avec le compas, le point E_3, tel que $DE_3 = DE_1$ et $BE_3 = BE_2$, comme ci-contre.

Remarque

En repliant ce patron, les points E_1, E_2, et E_3 vont coïncider en un point qui sera le point E.



D’autres patrons sont possibles, en découpant et en déployant le solide suivant une autre face.

II- Règles d'incidences

Les axiomes d'incidences de la géométrie dans l'espace sont des règles qui fournissent des relations entre les points, les droites et les plans de cette géométrie.

1. Par deux points distincts A et B de l'espace il passe une et une seule droite. Cette droite peut-être notée (AB)
2. Par trois points non alignés, A, B, C passe un et un seul plan. Ce plan peut-être noté (ABC).
3. Si A et B sont deux points d'un plan P, tous les points de la droite (AB) appartiennent au plan.

Il en résulte qu'un plan peut être déterminé par l'une des conditions suivantes :

trois points non alignés — deux droites sécantes — une droite et un point extérieur celle-ci

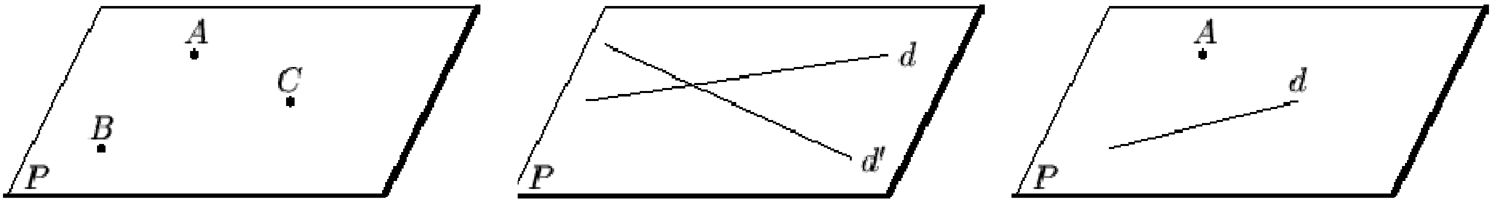
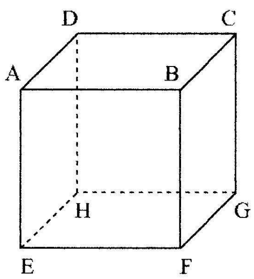


figure 1

Propriété : Les résultats de géométrie du plan sont applicables dans chaque plan de l'espace.

Vocabulaire :
- Des points sont dits coplanaires s'il existe un plan P qui les contient tous.
- Deux droites sont dites coplanaires s'il existe un plan P qui contient les deux droites.

Voici un cube représenté en perspective cavalière :



Les points A, B, C et D sont coplanaires : ils appartiennent tous au plan (ABC)

Les points A, B, H et G sont coplanaires : ils appartiennent tous au plan (ABH)

Les points A, B, C et G ne sont pas coplanaires : aucun plan ne peut contenir ces 4 points simultanément

figure 2

Exercice : caractériser un plan de l'espace :

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle. Les droites (AD) et (DF) déterminent-elles un unique plan ? Expliquer.

Démontrons par l'absurde que (AD) et (DF) sont non coplanaires.

Supposons que ces deux droites sont coplanaires, alors les 4 points A, D, B, F sont tous dans le même plan, par exemple, le plan (ADB), c'est-à-dire le plan de la face supérieure. Donc le point F appartient à la face supérieure. C'est faux !

Donc (AD) et (BF) sont non coplanaires.

III- Positions relatives de droites et plans

1. Positions relatives de droites

Soit d et d' sont deux droites de l'espace. Il existe 2 possibilités :

a. il n'existe aucun plan contenant ces deux droites, elles sont dites non coplanaires,

b. il existe un plan contenant ces deux droites, elles sont dites coplanaires. Dans ce cas, les droites sont alors soit sécantes soit parallèles dans ce plan. (propriété usuelle de géométrie plane).

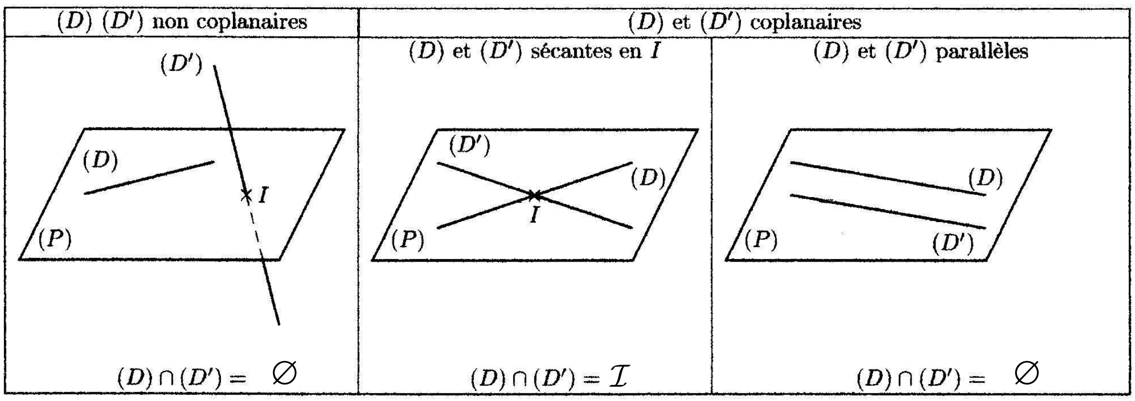


figure 3

Exercice : étudier la position relative de 2 droites :

ABCD est un tétraèdre. Etudier la position relative des droites (AB) et (CD) puis des droites (BD) et (IK) avec I le milieu de [AB] et K le milieu de [AD].

Solution :

Démontrons par l'absurde que les droites (AB) et (CD) sont non coplanaires.

Supposons que (AB) et (CD) sont coplanaires. Alors les 4 points A, B, C, D appartiennent par exemple au plan frontal (ABC). Donc le point D est sur la face ABC. C'est faux !

Donc (AB) et (CD) sont non coplanaires.

Dans le plan de la face ABD, on applique le théorème de la droite des milieux.

Dans le triangle ABD, I est le milieu de [AB] et K est le milieu de [BD]. La droite (IK) joint donc le milieu de deux côtés du triangle.

Or, dans un triangle, la droite joignant le milieu de deux côtés est parallèle au troisième côté.

Donc (IK) est parallèle à (BD).

2. Positions relatives de plans

$\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ sont deux plans de l'espace. Il n'existe que trois possibilités :

a. les plans $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ sont confondus : $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}$

b. $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ n'ont aucun point commun : $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ sont parallèles.

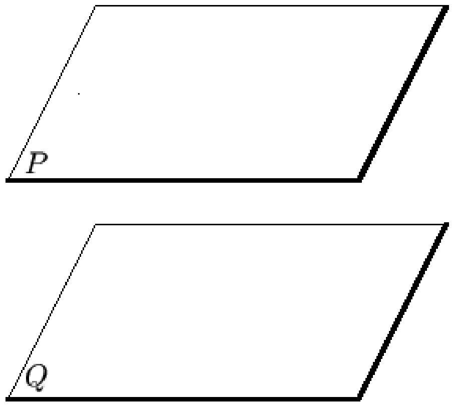


figure 4

c. $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ ont un point commun et sont distincts, alors ils sont sécants suivant une droite passant par ce point, (ainsi deux plans distincts qui ont deux points communs sont sécants suivant la droite définie par ces deux points)

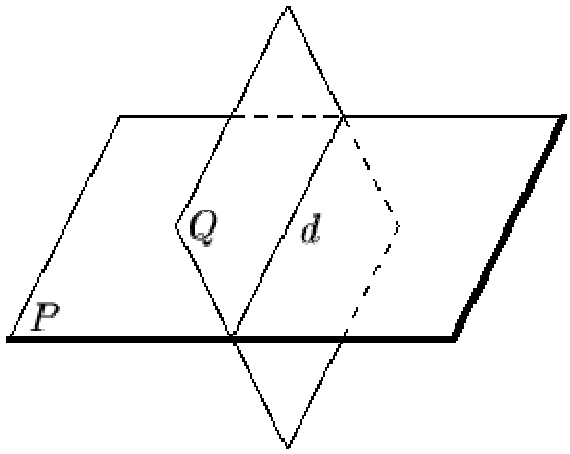


figure 5

corollaire : 2 plans distincts ayant 2 points communs sont sécants suivant la droite définie par ces 2 points.

Exercice : étudier l'intersection de 2 plans

SABCD est une pyramide de sommet S. Quelle est l'intersection des plans $(\boldsymbol{SAC})$ et $(\boldsymbol{SBD})$?

Solution :

Les plans (SAC) et (SBD) ont le point S en commun, donc ils sont sécants suivant une droite passant par S.

Notion E le point d'intersection des diagonales (AC) et (BD) dans le plan de la base ABCD.

On a E $\in$ (AC) et (AC) $\subset$ (SAC)

or, si une droite est contenue dans un plan, tous les points de la droite appartiennent au plan.

Donc E $\in$ (SAC).

De même que On a E $\in$ (BD) et (BD) $\subset$ (SBD) donc E $\in$ (SBD).

On a mis en évidence 2 points qui sont communs aux 2 plans, donc l'intersection des deux plans est la droite joignant les deux points : (SAC)$\cap$ (SBD)=(SE)

3. Positions relatives de droites et de plans

d est une droite et P un plan de l'espace. Il n'existe que trois possibilités :

a. la droite et le plan n'ont qu'un point commun, la droite et le plan sont dits sécants (voir la figure 2)

b. la droite et le plan n'ont aucun point commun.

c. la droite est incluse dans le plan,

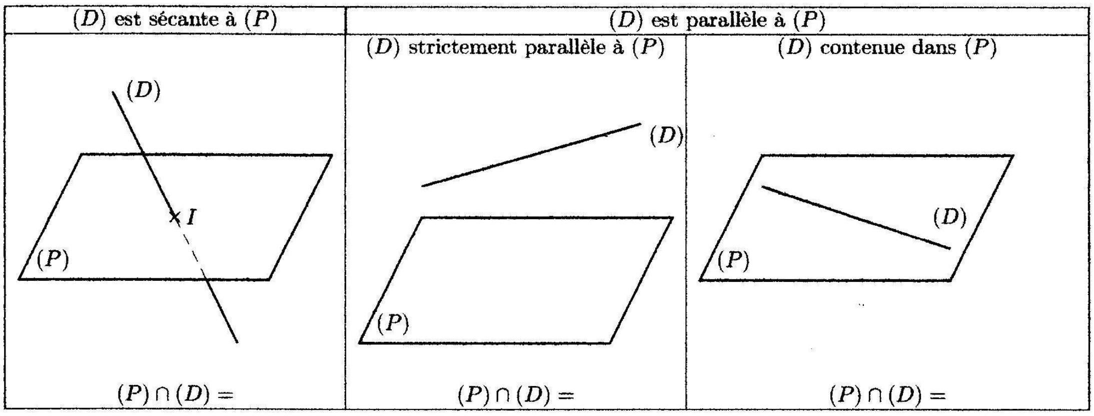
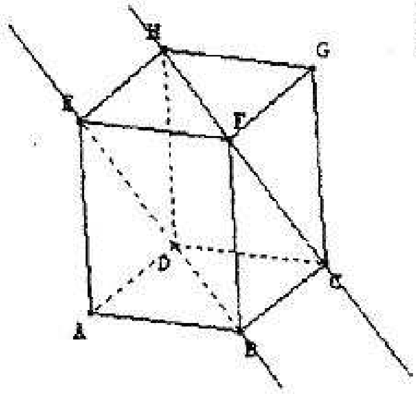


figure 6

Exercice : intersection d'un plan et d'une droite



ABCDEFGH désigne un cube : les droites (HF) et (EB) ont été **tracées**

1. Les points H, F et C sont-ils alignés ?
2. Même question avec E, B et D.
3. La droite (HF) est-elle parallèle à (EB) ?
4. Sont-elles sécantes ?
5. Déterminer l'intersection du plan (EAD) avec la droite (HG).

Solution :

1. Démontrons par l'absurde que les points H, F, C ne sont pas alignés.

Supposons que les points H, F, C sont alignés. Alors ils sont tous les 3 sur la droite (HF).

La droite (HF) est contenue dans le plan de la face supérieure.

Or si une droite est contenue dans un plan, alors tous les points de la droite appartiennent au plan.

Donc le point C qui appartient à la droite (HF) par hypothèse, appartient au plan de la face supérieure. C'est faux !

2. Même méthode avec les points E, B, D. On travaille avec la droite (EB) dans le plan frontal, et on observe que D n'appartient pas au plan frontal.

Conclusion : Les points E, B, D ne sont pas alignés (ils déterminent donc un plan).

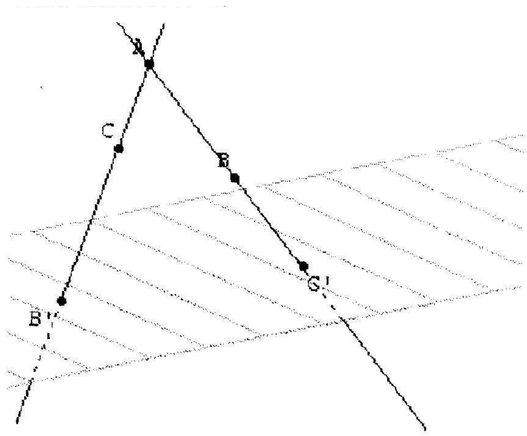
3. Supposons que (HF) et (ED) sont parallèles, alors elles sont coplanaires. Il en résulte que les points E,F,B, D sont dans un plan commun, par exemple le plan supérieur (HEF). Or D n'est pas un point de cette face. Donc (HF) et (ED) ne sont pas coplanaires, elles sont ni parallèles, ni sécantes.

4. Deux droites non coplanaires ne sont ni parallèles, ni sécantes.

5. L'intersection d'un plan et d'une droite est un point. Déterminons un point commun au plan et à la droite.

(EAD) est le plan de la face de gauche. H est un point de la face de gauche et G n'est pas un point de cette face, donc la droite (HG) n'est pas contenue dans le plan. Donc la droite (HG) et le plan sont sécants en H.

Exercice : Méthode pour montrer que 3 points sont alignés



Soit P' un plan, A, B et C trois points non alignés hors de P'.
On suppose que (AB) coupe P' en C', que (AC) coupe P' en B' et (BC) coupe P' en A'.
> Montrer que A', B' et C' sont alignés.
> Tracer A'.

Solution :

Pour montrer que 3 points sont alignés on peut déterminer qu'ils appartiennent à l'intersection de 2 plans. En effet, deux plans non parallèles sont sécants suivant une droite.

On sait par hypothèse que A', B', C' sont trois points du plan P'.

Nommons P le plan (ABC).

La droite (AC) est contenue dans le plan P et B' est un point de la droite (AC)

Or si une droite est contenue dans un plan, alors tous les points de la droite appartiennent à ce plan.

Donc B' $\in$ *P.*

De même, la droite (AB) est contenue dans le plan P et C' est un point de la droite (AB) donc C' $\in$ *P.*

Enfin, la droite (BC) est contenue dans le plan P et A' est un point de la droite (BC) donc A' $\in$ *P.*

Les points A',B',C' appartiennent donc au plan P mais aussi au plan P', ils appartiennent donc à l'intersection des deux plans.

Or l'intersection de deux plans est une droite,

Donc les points A', B', C' sont sur cette droite, autrement dit ils sont alignés.

Exercices : *en classe, ex n°3 et 4 (feuille module) + n°13 et 14 du manuel Hyperbole*

A préparer *: ex n° 15 et 16*

IV- Parallélisme dans l'espace

1- Définitions

- Deux droites sont parallèles lorsqu'elles sont coplanaires et non sécantes. Il en est ainsi de deux droites confondues ou bien coplanaires et sans point commun.
- Deux plans sont parallèles lorsqu'ils ne sont pas sécants. Il en est ainsi de deux plans confondus ou sans point commun.
- Une droite et un plan sont parallèles lorsqu'ils ne pas sécants. Il en est ainsi d'une droite incluse dans un plan ou d'une droite et d'un plan sans point commun.

Remarques importantes :

- Dans l'espace, le fait que deux droites n'aient aucun point commun ne suffit pas pour conclure qu'elles sont parallèles.
- Deux droites strictement parallèles définissent un plan.

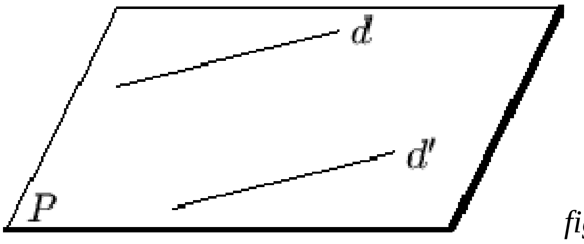


figure 7

2- Parallélisme entre droites

Théorème 1 Deux droites parallèles à une même troisième droite sont parallèles entre elles.

Théorème 2 Si $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ sont deux plans parallèles, alors tout plan qui coupe $\boldsymbol{P}$ coupe aussi $\boldsymbol{Q}$ et les droites d'intersection sont parallèles.

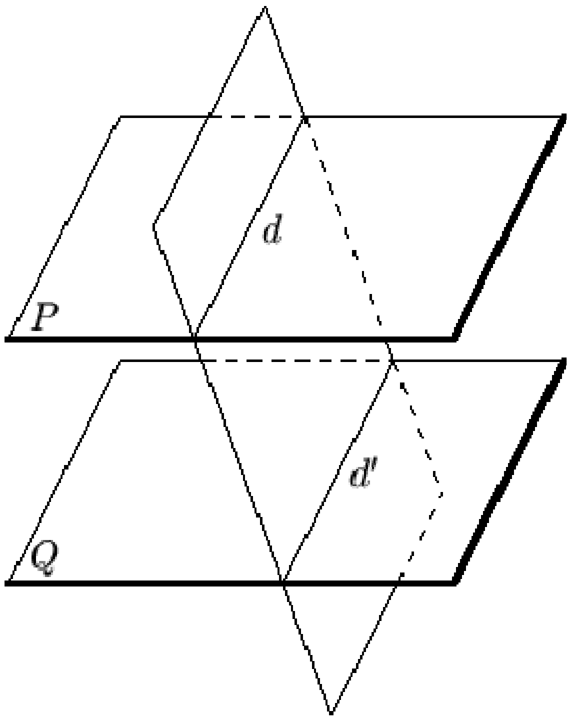


figure 8

Exemple : démontrer que 2 droites sont parallèles

On considère le cube ABCDEFGH de la figure 2 . Démontrer que les droites (AB) et (HG) sont parallèles.

Solution :

Dans le carré ABCD, on a (AB) // (CD)
Dans le carré CDHG, on a (CD) // (HG)

Or, (théorème 1), si deux droites sont parallèles, toute parallèle à l'une est parallèle à l'autre.
Donc (AB) // (HG)

Théorème 3 Si une droite est parallèle à deux plans sécants alors elle est parallèle à leur droite d'intersection.

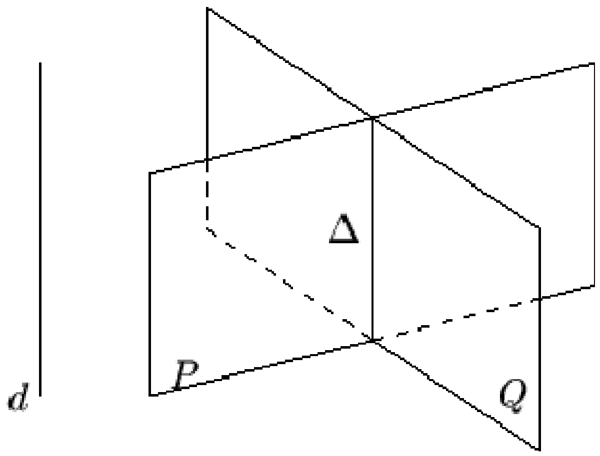


figure 9

Théorème 4 "Théorème du toit"

d et d' sont deux droites parallèles. P est un plan contenant d et P' un plan contenant d'. Si, en outre, les plans P et P' sont sécants, alors la droite Δ d'intersection de ces plans est parallèle à d et d'.

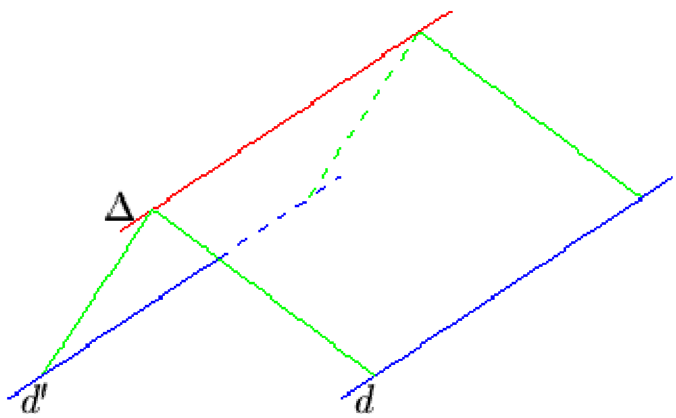


figure 10

Exemple : démontrer que 2 droites sont parallèles *(ex n°6 feuille module)*

ABCD est un tétraèdre. I est un point de l'arête [AB] et J est un point de l'arête [AC] tels que : $(IJ)//(BC)$. Soit K un point de [CD] et L, le point d'intersection de (IJK) et (BD). Montrer que (LK) est parallèle à (IJ).

Démontrons que (LK) = (IJK) $\cap$ (BCD)
On sait que L $\in$ (IJK) d'après la phrase « L est le point d'intersection de (IJK) et (BD) »
De plus, K $\in$ (IJK) de façon triviale, il en résulte que (LK) $\subset$ (IJK)

On va démontrer maintenant que (LK) $\subset$ (BCD)

On sait que K $\in$ (CD) donc K $\in$ (BCD) ; de plus, par hypothèse (phrase rappelée précédemment) on sait que L $\in$ (BD), donc L $\in$ (BCD). Il en résulte que (LK) $\subset$ (BCD) CQFD

Exercice n°5 à préparer

3- Parallélisme entre plans

Théorème 5 Deux plans parallèles à un même troisième plan sont parallèles entre eux.

Théorème 6 Si deux droites sécantes d'un plan $\boldsymbol{P}$ sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un plan $\boldsymbol{Q}$, alors les plans $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ sont parallèles.

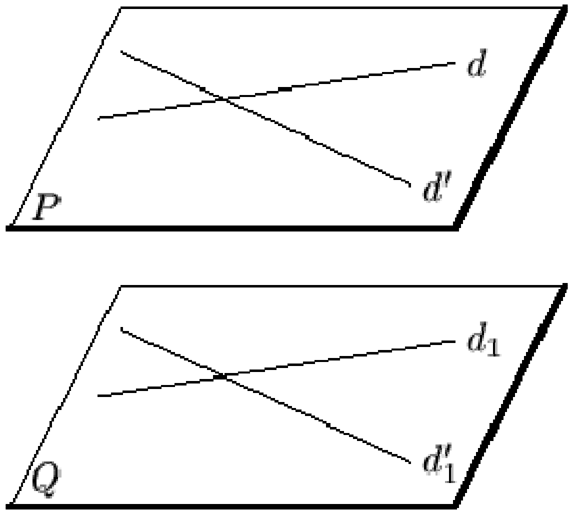


figure 11

Exemple : démontrer que 2 plans sont parallèles

ABCD est un tétraèdre. M est un point de l'arête [AB] et N est un point de l'arête [AC] tels que : $(\boldsymbol{MN})//(\boldsymbol{CD})$. Démontrer que les plans $(\boldsymbol{MNP})$ et $(\boldsymbol{BCD})$ sont parallèles.

Solution :

4- Parallélisme entre droite et plan

Théorème 7 Si une droite $\boldsymbol{d}$ est parallèle à une droite $\boldsymbol{d}'$, alors la droite $\boldsymbol{d}$ est parallèle à tout plan $\boldsymbol{P}$ contenant la droite $\boldsymbol{d}'$.

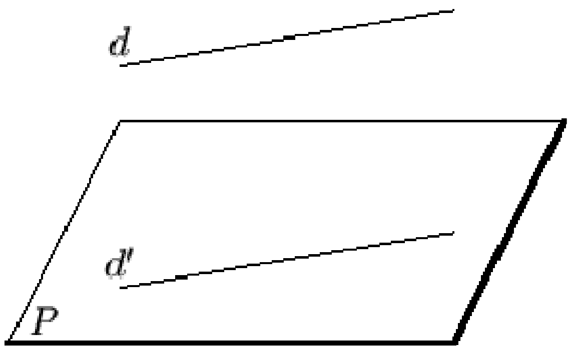


figure 12

Exemple :

On reprend l'exemple précédent, démontrer que la droite $(\boldsymbol{MP})$ et le plan $(\boldsymbol{BCD})$ sont parallèles.

Solution :

Exercices : n°20 et 21 de la feuille d'exercices

A préparer : EX n° 21, 22, 23