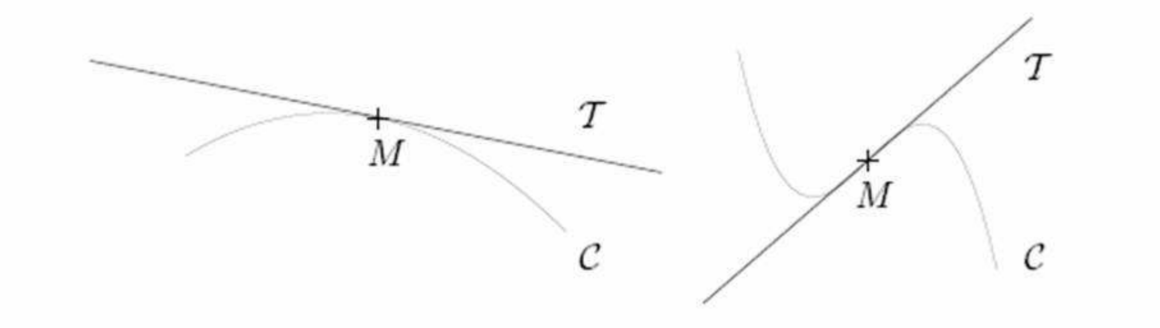
CHAPITRE 6 : NOMBRE DERIVE

I- Tangente et nombre dérivé

1. Notion de tangente

on appelle tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point M, si elle existe, la droite qui approche le mieux la courbe $\mathcal{C}$ ***au voisinage*** du point M. Si on devait zoomer au voisinage de M, la tangente et la courbe sembleraient confondues.



2. Taux d'accroissement

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I .

Soit A le point de la courbe d'abscisse a et soit M le point de la courbe d'abscisse $(a+h)$ avec h un réel quelconque.

Exprimons en fonction de a et h le coefficient directement de la droite *(AM)*.

Le coefficient directeur de *(AM)* est $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_M - y_A}{x_M - x_A}$

A et M sont deux points de la courbe représentative de la fonction *f. Donc on a* $y_M = f(x_M)$ *et* $y_A = f(x_A)$ *avec* $x_A = a$ *et* $x_M = a+h$

On a ainsi $y_A = f(a)$; $y_M = f(a+h)$

Il en résulte que $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Le nombre $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ est appelé taux d'accroissement de f entre a et $(a+h)$.

3. Tangente à une courbe

Graphiquement, lorsque h tend vers zéro, le point M se rapproche de A, et la droite (AM) est alors tangente à la courbe $\mathcal{C}$.

Exemple : soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x$

a. Calculer $f(1)$ et $f(1+h)$ pour $h \neq 0$.

b. En déduire le taux d'accroissement de f en 1.

c. Quel est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 ?

Solution :

a. $f(1) = 1^2 + 1 = 2$; $f(1+h) = (1+h)^2 + (1+h) = 1 + 2h + h^2 + 1 + h = h^2 + 3h + 2$

b. Le taux d'accroissement de f en 1 est donc $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{h^2 + 3h}{h} = \dfrac{h^2}{h} + \dfrac{3h}{h} = h + 3$

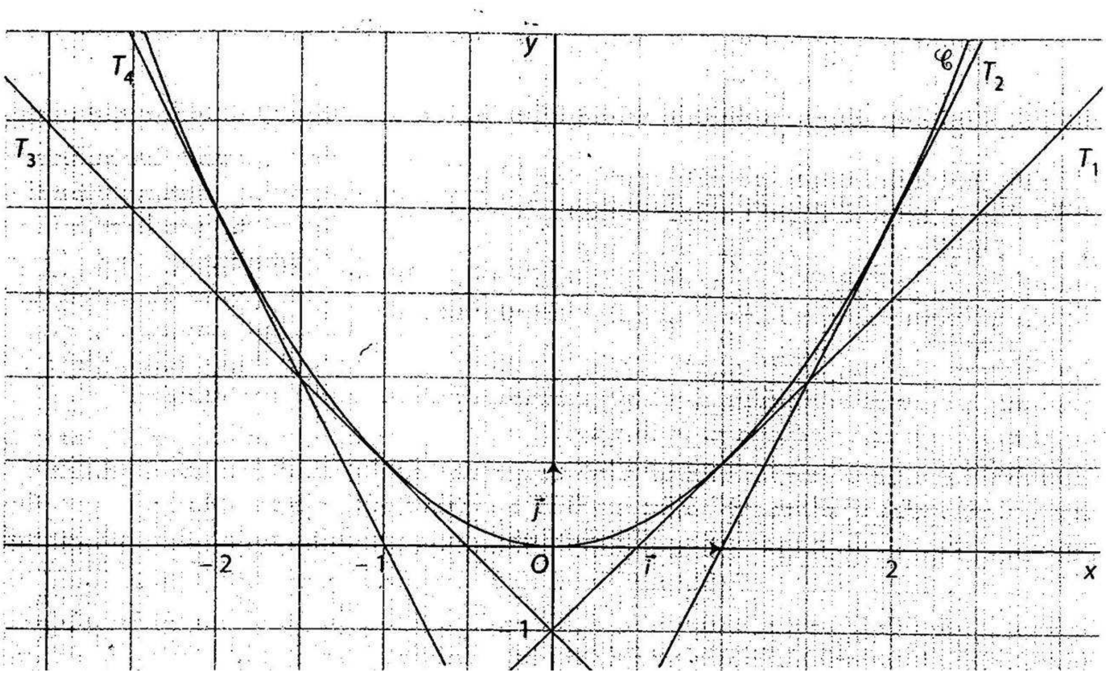
c. Le coefficient directeur de la tangente à à C au point d'abscisse 1 est la limite du taux d'accroissement lorsque h tend vers zéro, c'est-à-dire quand le point M se rapproche infiniment du point A et quand la droite (AM) occupe la position limite de tangence à $\mathcal{C}$ en A.

$\lim\limits_{h \to 0} h + 3 = 3$ donc $f'(1) = 3$

4. Nombre dérivé en un point d'abscisse *a*

Soit f une fonction et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Si la courbe C admet une tangente au point A de coordonnées $(a; f(a))$ non parallèle à l'axe des ordonnées, alors on appelle nombre dérivé de la fonction f en a, et on note $f'(a)$, le coefficient directeur de cette tangente.

Activité : la tangente et son coefficient directeur

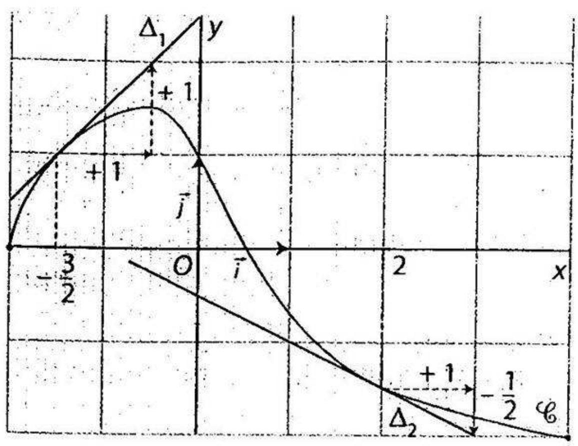


Le plan est rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
$\mathcal{C}$ est la courbe représentative de f définie sur R par $f(x)=x^2$.
T1, T2, T3 et T4 sont respectivement les tangentes à C aux points d'abscisses $1;2;-1$ et -2.
L'axe des abscisses est la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
1- Déterminer, à l'aide du graphique, les coefficients directeurs des droites T1, T2, T3 et T4.
2- On note $f'(x_A)$ le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a.
Déterminer $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$ et $f'(-2)$

Méthode : déterminer un nombre dérivé

Pour déterminer un nombre dérivé $f'(x_A)$, on détermine le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_A :

- Il peut être lu directement sur une représentation graphique ;
- Il peut être obtenu en utilisant la formule $\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$, où A et B sont deux points distincts de la tangente ;
- Il peut être donné directement si l'équation de la tangente, de la forme $y=mx+p$ est connue (c'est le nombre m).



Exercice : Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$. $\mathcal{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur [-2 ;4].

- Δ_1 et Δ_1 sont respectivement les tangentes à $\mathcal{C}$ aux points d'abscisses et $-\dfrac{3}{2}$ et 2.
- En $x=-\dfrac{1}{2}$, $\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

1- Déterminer les valeurs de $f'(-\dfrac{3}{2})$, $f'(2)$, $f'(-\dfrac{1}{2})$
2- La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées $(-\dfrac{1}{2},2)$. Déterminer $f'(0)$.
Une équation de la tangente à C au point d'abscisse -2 est $y=3x+6$. Déterminer $f'(-2)$.

② comment tracer une tangente en un point d'abscisse x_A connaissant $f'(x_A)$?

On se positionne sur la courbe au point A de coordonnées $(x_A;f(x_A))$ puis on trace la droite passant par ce point et de coefficient directeur $f'(x_A)$. Le coefficient directeur est reporté grâce au procédé $m=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Exercice : soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm).

1- Tracer $\mathcal{C}$.

2- Calculer $f(0,5)$ et $f'(0,5)$ et tracer la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $0,5$.

5. Equation réduite de la tangente au point A d'abscisse $x_A = a$

l'équation de la tangente en A a pour équation :

$$y = f'(a)(x-a)+f(a)$$

Preuve :

On sait que l'équation de la tangente est de la forme $y = mx+p$, avec $m = f'(x_A)$ soit $m = f'(a)$

L'équation de la tangente est donc $y = f'(a)x+p$

Déterminons p à l'aide d'un point.

Le point A est un point de la droite, donc ses coordonnées vérifient $y_A = mx_A+p$, de plus $y_A = f(a)$ car le point A est aussi un point de la courbe représentative de *f*.

On a donc $f(a) = f'(a)a+p$ d'où $p = f(a)-af'(a)$

L'équation de la tangente est donc : $y = f'(a)x+f(a)-af'(a)$ soit $y = f'(a)(x-a)+f(a)$

Exercice : Soit $\mathcal{T}$ la tangente de l'exercice méthode 2. Déterminer son équation réduite.

Solution :

Applications : comment déterminer un nombre dérivé

Application 1

Dans le plan rapporté à un repère orthogonal, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

1. La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 3 passe par les points $A(1\,;-2)$ et $B(-2\,;4)$. Déterminer $f'(3)$.

2. La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -3 a pour équation $y=-\frac{1}{2}x-1$. Déterminer $f'(-3)$.

Application 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm).

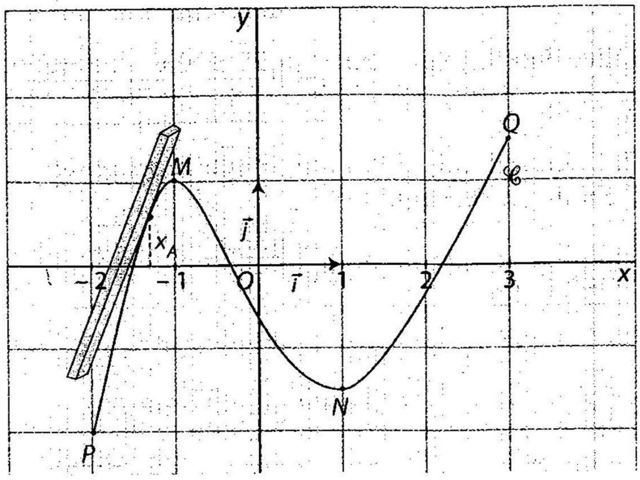
1. Tracer avec précision la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}$.

2. Tracer, sur ce graphique, la droite T, tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2, sachant que $f'(2)=-\frac{1}{4}$.

II- Sens de variation et signe du nombre dérivé

1. Activité : SURF SUR COURBE

On donne, ci-contre, un tracé de la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2\,;3]$.
En chacun des points M et N d'abscisses respectives -1 et 1, la tangente à $\mathcal{C}$ est parallèle à l'axe des abscisses.



1. Donner les valeurs de $f'(-1)$ et de $f'(1)$.

2. Dresser le tableau de variation de f.

3. Placer sur le graphique une règle matérialisant une tangente à la courbe $\mathcal{C}$, en un point d'abscisse x_A, situé entre P et M.
Quel est le signe du coefficient directeur de cette tangente ?
En déduire le signe de $f'(x_A)$.

4. Reprendre la question 3 pour un point de $\mathcal{C}$ situé entre M et N, puis pour un point de $\mathcal{C}$ situé entre N et Q.

5. « Parcourir » avec la règle toute la courbe, de P à Q, pour compléter la ligne « signe de $f'(x)$ » du tableau de variation.

x	-2 $\quad -1$ $\quad 1$ $\quad 3$
sens de variation de f	
signe de $f'(x)$	

Quel est le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à un intervalle où f est strictement croissante ? Quel est le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à un intervalle où f est strictement décroissante ?

2. Propriété

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- f est croissante sur un intervalle J inclus dans I si et seulement si pour tout nombre réel x appartement à J, $f'(x) \geq 0$.
- f est décroissante sur un intervalle J inclus dans I si et seulement si pour tout nombre réel x appartement à J, $f'(x) \leq 0$.
- f admet un extremum local si et seulement si $f'(x)$ s'annule en changeant de signe.

Méthodes : déduire le signe de $f'(x)$ à partir du tableau de variation ou de la courbe de f

On lit le tableau de variation de f dans le tableau de variation ou sur la courbe :
- Sur tout intervalle où f est strictement croissante (la courbe « monte »), $f'(x) \geq 0$;
- Sur tout intervalle où f est strictement décroissante (la courbe « descend »), $f'(x) \leq 0$;

Exercice :

Associer à chaque tableau de variation de f ou courbe $\mathscr{C}_f$ représentant f, un tableau donnant le signe de $f'(x)$.

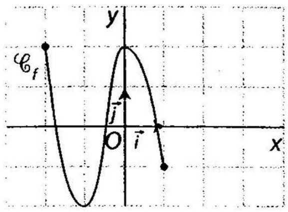
1

x	-2		0		1
$f(x)$	1	↘	0	↗	2

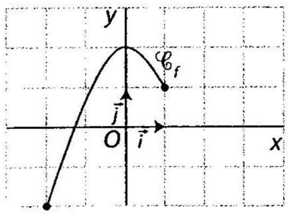
2

x	-2		-1		0		1
$f(x)$	1	↗	2	↘	0	↗	1

3



4



A

x	-2		-1		0		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

B

x	-2		0		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

C

x	-2		-1		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D

x	-2		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

Applications : sens de variation et signe du nombre dérivé

Application 1

On donne le tableau de variation d'une fonction f définie sur $[-1\,;7]$:

x	-1		1		2		4		7
$f(x)$	0	↗	2	↘	-1	↗	3	↘	0

Préciser, en fonction du nombre réel x appartenant à $[-1\,;7]$, le signe de $f'(x)$.

Application 2

Soit f la fonction définie sur $[-4\,;5]$ par

$f(x) = \dfrac{1}{12}x^3 - x - 1.$

1. Tracer la courbe représentative de f sur l'écran de la calculatrice.

2. Déterminer, en fonction du nombre réel x appartenant à $[-4\,;5]$, le signe de $f'(x)$.