# FICHE DE CORRECTION D'EXERCICES

**61 EXERCICE CORRIGÉ**

**Énoncé**

Soit $f$ la fonction définie sur $[0 ; 4]$ par :

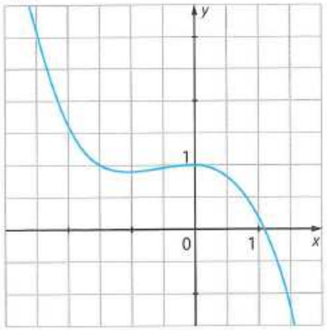
$$f(x) = 3x^2 - 12x + 13.$$

1. Calculer la dérivée de $f$ et déterminer son signe.
2. a. Pour quelle valeur de $x$ le minimum de $f$ est-il atteint ?
b. Quelle est la valeur du minimum de $f$ ?
3. $f(x)$ représente le coût de production en milliers d'euros de $x$ tonnes de bougies parfumées.
a. Pour combien de tonnes le coût est-il minimal ?
b. Quel est ce coût minimal ?

**Solution**

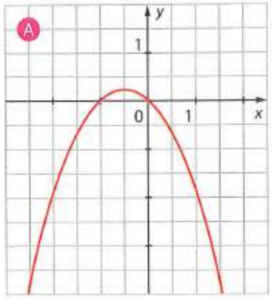
1. $f$ est dérivable sur $[0 ; 4]$ et $f'(x) = 6x - 12$.
$6x - 12 = 0$ équivaut à $x = 2$, donc $f'(x)$ est négatif sur $[0 ; 2]$ et positif sur $[2 ; 4]$.
2. a. $f$ est décroissante sur $[0 ; 2]$ et croissante sur $[2 ; 4]$, donc $f$ admet un minimum pour $x = 2$.
b. Le minimum de $f$ est égal à $f(2)$, c'est-à-dire 1.
3. a. D'après la question précédente, le coût est minimal pour la fabrication de 2 tonnes de bougies.
b. Ce coût minimal est égal à 1 millier d'euros.

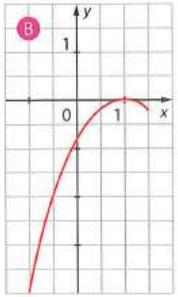
**27** Voici la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction $f$ définie sur $[-2,5 ; 1,5]$.




1. Par lecture graphique, déterminer le sens de variation de $f$ sur $[-2,5 ; 1,5]$.
2. En déduire le signe de $f'$ sur $[-2,5 ; 1,5]$.

3. Une des deux courbes ci-dessous est la courbe représentative de la dérivée de la fonction $f$, laquelle ? Justifier la réponse.




**Solution**

$f$ est décroissante sur [-2,5;-1] donc $f'$ est négative sur [-2,5;-1].
$f$ est croissante sur [-1;0] donc $f'$ est positive sur [-1;0].
$f$ est décroissante sur [0;1,5] donc $f'$ est négative sur [0;1,5]

$f'$ est négative sur [-2,5;-1] ; positive sur [-1;0] et négative sur [0;1,5].
Le graphique représentant $f'$ est donc le graphique A car la courbe est sous l'axe des abscisses sur [-2,5;-1], au dessus de l'axe des abscisses sur [-1;0] et sous l'axe des abscisses sur [-2,5;-1].

**VRAI – FAUX**

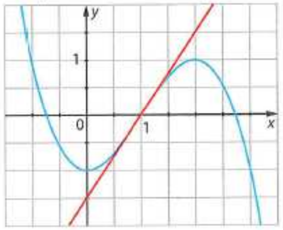
Pour les exercices **29** et **30**, indiquer si chaque affirmation est vraie ou fausse, puis justifier.

**29** Voici le tableau de variations d'une fonction $f$.

| $x$ | $-\infty$ | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f$ | ↗ | $-2$ | ↘ |

1. La dérivée de $f$ est négative sur $\mathbb{R}$.
2. La dérivée de $f$ est positive sur $]-\infty ; 3]$.

**30** Sur le graphique ci-dessous est représentée une fonction $f$ ainsi que la tangente à sa courbe au point d'abscisse 1.




1. $f'(1)$ est positif.
2. $f'(x)$ est positif pour $x$ appartenant à $[-1 ; -0,75]$.

**Solution 29**

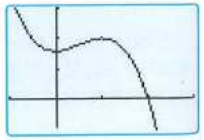
$f$ est croissante sur [- ;3] donc $f'$ est positive sur [-∞ ;3]
$f$ est décroissante sur [3;+∞ ] donc $f'$ est négative sur [3;+∞ ]. La propsition 1 est donc fausse, mais la proposition 2 est vraie.

**Solution 30**

La tangente au point d'abscisse 1 monte, son coefficient directeur est donc positif, or $f'(1)$ correspond au coefficient directeur de cette tangente,
donc la proposition est vraie.
$f$ est décroissante sur [-1;-0,75] donc $f'(x)<0$ pour tout $x$ appartenant à [-1;-
0,75]. La proposition2 est vraie.

## Étudier le sens de variation d'une fonction

**31** Voici la courbe représentative de la dérivée $f'$ d'une fonction $f$ pour $x$ appartenant à $[-1 ; 3]$.



1. Déterminer graphiquement le signe de $f'$.
2. Donner le sens de variation de $f$ sur $[-1 ; 3]$.

**Solution**

$f$ est décroissante sur [-1;0] donc $f'$ est négative sur [-1;0]
$f$ est croissante sur [0;1] donc $f'$ est positive sur [0;1]
$f$ est décroissante sur [1,3] donc $f'$ est négative sur [1,3].

| $x$ | -1 | | 0 | | 1 | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | − | 0 | + | 0 | − | |

**64** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 - 8x$.

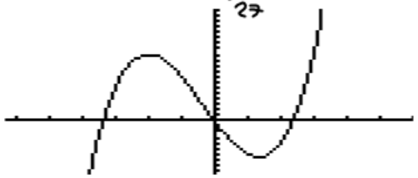
1. Étudier le sens de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$.
2. En quelle valeur de $x$ le maximum de $f$ sur $[-3 ; 2]$ est-il atteint ? Quel est ce maximum ?

**Solution**

1. Les variations de $f$ dépendent du signe de sa dérivée.
Pour tout $x$ appartenant à IR, $f'(x)=3x^2+2x-8$
Etudions le signe de $f'(x)$ en commençant par déterminer les valeurs pour lesquelles $f'(x) = 0$.
Il n'y a pas de racine évidente, ni de factorisation immédiate, donc on calcule le discriminant :
$\Delta = (2)^2-4\times3\times(-8) = 100$ $\sqrt{\Delta} = 10$
On obtient donc $x_1 = -2$ $x_2 = \frac{4}{3}$

La fonction dérivée est une fonction trinôme du second degré, dont le signe est connu par propriété de cours ("signe de a à l'extérieur des racines").
D'où le tableau suivant.

| $x$ | $-\infty$ | $-3$ | $-2$ | | $4/3$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | $0$ | | $0$ | | |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $6$ ↗ | $12$ | ↘ | $-\frac{176}{27}$ ↗ | $-4$ ↗ | $+\infty$ |



2. Les images ont été calculées à la main.
Sur $[-3;2]$, le maximum de $f$ est atteint pour $x=-2$ et vaut 12.

**44** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal d'unités 1 cm sur l'axe des abscisses et 0,2 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Déterminer le sens de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
3. Construire la courbe $\mathscr{C}_f$ et la tangente T.

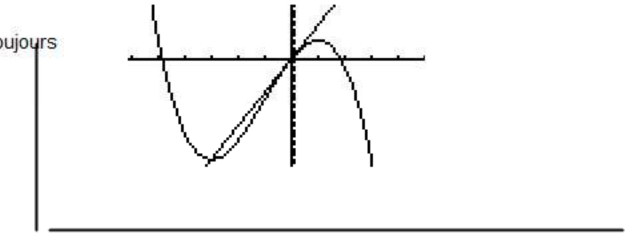
**Solution**

1. Les variations de $f$ dépendent du signe de sa dérivée.
Pour tout x appartenant à IR, $f'(x) = -3x^2 - 6x + 9$
Etudions le signe de f'(x) en commençant par déterminer les valeurs pour lesquelles $f'(x) = 0$.
Il a une racine évidente : 1 est racine évidente; le produit des racines étant égal à "c/a" on en déduit que la deuxième racine est -3
La fonction dérivée est une fonction trinôme du second degré, dont le signe est connu par propriété de cours ("signe de a à l'extérieur des racines").
D'où le tableau suivant.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $-11$ | ↗ | $5$ | ↘ | $-\infty$ |

2. Les images ont été calculées à la main.
L'équation de la tangente en 0 est : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$
avec $f(0) = 0$ ; $f'(0) = 9$ $y = 9x$

3.



**45** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x$.

1. Déterminer le sens de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
3. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à sa tangente T.

==

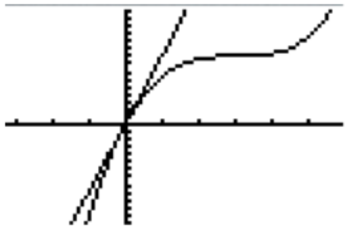
**Solution**

1. Les variations de $f$ dépendent du signe de sa dérivée.
Pour tout x appartenant à IR, $f'(x) = x^2 - 6x + 9$
Etudions le signe de f'(x) en commençant par déterminer les valeurs pour lesquelles $f'(x) = 0$.
la forme factorisée de $f'(x)$ est évidente car on reconaît une identité remarquable. $f'(x) = (x - 3)^2$
3 est donc racine double.

D'où le tableau suivant. Remarque : un carré est toujours positif ou nul !

| $x$ | $-\infty$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | $9$ | ↗ | |

2. Les images ont été calculées à la main.
L'équation de la tangente en 0 est : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$
avec $f(0) = 0$ ; $f'(0) = 9$ $y = 9x$



3. **POINT METHODE : position relative de la courbe et d'une tangente**
Soient f et g deux fonctions. Pour connaître la position relative des courbes $Cf$ et $Cg$ c'est à dire, pour savoir laquelle est au dessus de l'autre, on étudie le signe de la différence $f(x)-g(x)$.
Graphiquement, on conjecture que $Cf$ est en dessous de la tangente en 0.

pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $g(x) = 9x$
$f(x) - g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2$
$= x^2\left(\frac{1}{3}x - 3\right)$
du signe de $\frac{1}{3}x - 3$

or $\frac{1}{3}x - 3 \geq 0$
$\Leftrightarrow x \geq 9$ on en déduit que
$f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 9$
$\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $[9;+\infty[$ et donc
$\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$ sur $]-\infty; 9]$

**62** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

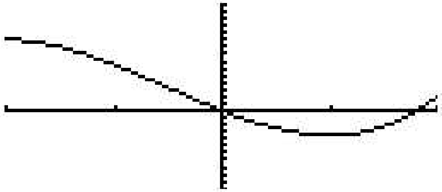
$$f(x) = x^3 + 1{,}5x^2 - 6x.$$

**1. a.** Tracer la représentation graphique de $f$ sur la calculatrice.
**b.** Par lecture graphique, quel semble être le minimum de $f$ sur $[-2 ; 2]$ ?
En quelle valeur de $x$ semble-t-il atteint ?

**2. a.** Calculer la dérivée de $f$ et déterminer son signe.
**b.** Déterminer le minimum de $f$ sur $[-2 ; 2]$.

**Solution**

1.a.



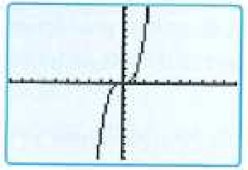
b. Sur [-2;2], le minimum semble être atteint pour $x$=1 et vaut $f(1)=-3{,}5$

2. Les variations de $f$ dépendent du signe de sa dérivée.
Pour tout $x$ appartenant à IR, $f'(x)=3x^2+3x-6=3(x^2+x-2)$
Etudions le signe de $f'(x)$ en commençant par déterminer les valeurs pour lesquelles $f'(x)=0$.
Il y a une racine évidente : c'est 1; donc la seconde racine est -2 d'après la règle sur la valeur du produit des racines ("c/a")
Remarque : la forme factorisée de $f'(x)$ est donc $f'(x) = 3(x-1)(x+2)$

La fonction dérivée est une fonction trinôme du second degré, dont le signe est connu par propriété de cours ("signe de a à l'extérieur des racines").
D'où le tableau suivant.

| $x$ | $-2$ | | $1$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | 10 | ↘ | $-3{,}5$ | ↗ | 2 |

**65** Sur le graphique ci-contre est représentée sur $[-10 ; 10]$ la fonction $f$ définie par $f(x) = x^3 - 0{,}12x$.



**1.** Par lecture sur ce graphique, quel semble être le sens de variation de $f$ sur $[-10 ; 10]$ ?

**2. a.** Étudier le sens de variation de $f$ sur $[-10 ; 10]$.
**b.** Cette étude confirme-t-elle la lecture faite sur le premier graphique ?

**3. a.** Déterminer les extremums locaux de $f$ sur $[-10 ; 10]$.
**b.** En utilisant les extremums sur $[-10 ; 10]$ de $f$, déterminer une fenêtre permettant de voir sur l'écran de la calculatrice une représentation graphique de $f$ conforme à l'étude du sens de variation de $f$.
**c.** Construire la représentation graphique de $f$ sur la calculatrice

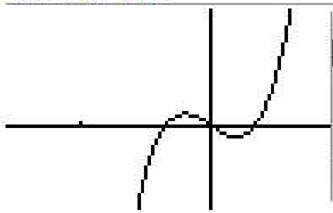
**Solution**

1. $f$ semble être croissante sur [-10;10].
2. Les variations de $f$ dépendent du signe de sa dérivée.
Pour tout $x$ appartenant à IR, $f'(x)=3x^2-0{,}12$
Etudions le signe de $f'(x)$ en commençant par déterminer les valeurs pour lesquelles $f'(x)=0$.
On factorise facilement $f'(x)$ à l'aide de l'identité remarquable n°3 :
$f'(x) = 3(x^2-0{,}04)=3(x-0{,}2)(x+0{,}2)$
D'après la règle du produit nul, les racines sont donc :
- 0,2 et 0,2

La fonction dérivée est une fonction trinôme du second degré, dont le signe est connu par propriété de cours ("signe de a à l'extérieur des racines").
D'où le tableau suivant.

| $x$ | $-10$ | | $-0{,}2$ | | $0{,}2$ | | $10$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f'(x)$ | | ↗ | 0,016 | ↘ | $-0{,}016$ | ↗ | |

On met donc en évidence que la taille de la fenêtre graphique nous a induit en erreur. $f$ n'est pas monotone sur [-10;10].
3.a. f atteint ses extrema en -0,2 et 0,2. leur valeur est calculée à la calculatrice en mode TABL



```
View Window
Xmin  :-1.58730015
 max  :1.74603174
 scale:1
 dot  :0.02645502
Ymin  :-0.1341726
 max  :0.15964038
```

**66** Le nombre d'abonnés à une revue dépend du prix de l'abonnement. Pour un prix $p$ compris entre 0 et 200 €, le nombre d'abonnés est donné par la fonction $f$ telle que :

$$f(p) = -50p + 12\,500.$$

**1.** Quel est le nombre d'abonnés si on fixe le prix à 50 € ?

**2.** On appelle recette le montant total perçu par l'éditeur de cette revue.

**a.** Si le prix $p$ est fixé à 50 €, quelle est la recette perçue par l'éditeur ?

**b.** Le prix de l'abonnement étant égal à $p$ euros, exprimer, en fonction de $p$, la recette $R(p)$ de l'éditeur.

**3. a.** Déterminer le prix $p$ de l'abonnement qui permet d'obtenir la recette maximale.

**b.** Quel est le nombre d'abonnés qui correspond à cette recette maximale ?

**Solution**

1. $f(50)$ = - 50x50 + 12 500 = 10 000

2.a si on vend un abonnement à 50€ sachant qu'il y a $f(50)$ abonnés, alors la recette sera égale à $f(50)$x50 = 10 000 x 50 = 500 000 €

b. R($p$) = $p$ x f($p$)

3. Les variation de R dépendent du signe de sa dérivée.

Pour tout $p > 0$ on a R($p$)= - 50$p^2$ + 12 500$p$

Il en résulte que pour tout $p > 0$ on a R'($p$)= -100 $p$ + 12500

*Rappel : dans le tableau de signe d' une expression du type ax+b le signe de a est placé à droite du zéro.*

Pour dresser le tableau de signe de R'($p$) on commence par déterminer les valeurs de $p$ telles que R'($p$)=0

R'($p$)= -100 $p$ + 12500 *ssi* -100 $p$ + 12500 = 0

ssi -100 $p$ = -12 500 ssi $p$ = 125

Le signe de a est à droite du zéro !

On en déduit donc le tableau suivant :

| $p$ | 0 | | 125 | | 200 |
|---|---|---|---|---|---|
| $R'(p)$ | | + | 0 | − | |
| $R(p)$ | | ↗ | 781250 | ↘ | |

3. On en déduit que le prix de l'abonnement permettant d'obtenir une recette maximale est de 125€. Il permet d'avoir un nombre d'abonnés égal à $f(125)$=6 250.

La recette est de 6250 x 125 = 781 250€

**68** Dans le Périgord, un producteur de truffes noires cultive, ramasse et conditionne de 0 à 45 kilogrammes de ce produit par semaine durant la période de production de la truffe.

On désigne par $x$ le nombre de kilogrammes de truffes traités chaque semaine et par $f(x)$ le coût total pour la production de $x$ kilogrammes de truffes.

Pour ce producteur $f(x) = x^3 - 60x^2 + 975x$.

De plus, chaque kilogramme de truffes conditionné est vendu 450 euros.

**1.** Exprimer le bénéfice $B(x)$ réalisé par le fabricant pour $x$ kilogrammes de truffes conditionnés et vendus.

**2.** Étudier le sens de variation de la fonction $B$.

**3.** Pour quelle quantité de truffes le bénéfice du fabricant est-il maximal ?

**4.** Quel est alors ce bénéfice maximal ?

**Solution**

1. $R(x)$ = 450$x$ de plus B($x$)=$R$($x$) - $f$($x$)

donc B($x$)= $450x-(x^3-60x^2+975x)$

d'où B($x$)= $-x^3+60x^2-525x$

2. Les variation de B dépendent du signe de sa dérivée.

Pour tout $x > 0$ on a B'($x$)= - 3 $x^2$ + 120 $x$ - 525

Pour dresser le tableau de signe de B'($x$) on commence par déterminer les valeurs de $x$ telles que B'($x$)=0

Pour cela on calcule le discriminant :

$$\Delta = (120)^2 - 4 \times (-3) \times (-525) = 8100$$

$$\sqrt{\Delta} = 90$$

Les racines sont donc

$$x_1 = \frac{-120-90}{-6} = 35 \qquad x_2 = \frac{-120+90}{-6} = 5$$

L'étude du signe d'un trinôme du second degré est du niveau application du cours.

On en déduit donc le tableau suivant :

| $x$ | 0 | | 5 | | 35 | | 45 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B'(x)$ | | − | 0 | + | 0 | − | |
| $B(x)$ | | ↘ | | ↗ | | ↘ | |

3. On en déduit que le bénéfice est maximal pour une quantité de 35kg de truffes.

4. B(35) = 12 250€

**69** Une entreprise produit des crayons de couleur. Lorsque la quantité $q$ (exprimée en milliers) est comprise entre 4 et 10, on admet que le coût de production journalier (exprimé en euros) est donné par $C(q) = q^3 - 48q + 600$.

L'entreprise vend 99 euros chaque millier de crayons.

**1. a.** Exprimer la recette pour la vente de $q$ milliers de crayons.

**b.** Montrer que le bénéfice journalier $B(q)$, exprimé en euros, est donné par $B(q) = -q^3 + 147q - 600$ avec $q$ appartenant à $[4 ; 10]$.

**2. a.** Calculer $B'(q)$ où $B$ désigne la dérivée de la fonction $B$.

**b.** Construire le tableau de variations de la fonction $B$ sur l'intervalle $[4 ; 10]$.

**c.** En déduire le nombre de milliers de crayons à produire quotidiennement pour obtenir un bénéfice maximal.

**d.** Quel est alors ce bénéfice maximal ?

**Solution**

1. a.$R$(q) = 99$q$ ($q$ étant une quantité exprimée en milliers d'articles)

b. B($q$)= $R$(q) - $C$(q) =$99q-(q^3-48q+600)$

d'où B($q$)= $-q^3+147q-600$

2. Les variation de B dépendent du signe de sa dérivée.

a.Pour tout $q > 0$ on a B'($q$)= - 3 $q^2$ + 147

b.Pour dresser le tableau de signe de B'($x$) on commence par déterminer les valeurs de $x$ telles que B'($x$)=0

Pour cela on factorise facilement l'expression de B'($x$).

En effet, B'($q$)=3(49 - $q^2$)= 3(7 - $q$)(7 + $q$)

D'après la règle du produit nul on a donc B'($x$)=0 ssi q = -7 ou q =7

L'étude du signe d'un trinôme du second degré est du niveau application du cours.

Sur l'intervalle [4;10], on obtient donc le tableau suivant :

| $q$ | 4 | | 7 | | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $B'(q)$ | | + | 0 | − | |
| $B(q)$ | | ↗ | | ↘ | |

c. On en déduit que le bénéfice est maximal pour une quantité de 7 milliers de crayons, soit 7000 crayons.

d. B(7) = 86 €