

Définir la loi de probabilité d'une variable aléatoire

27 Au début d'une séance de cinéma, on distribue au hasard un billet de loterie à chacun des 120 spectateurs.

Parmi les 120 billets distribués :

- 3 donnent droit à 4 places gratuites ;
- 6 donnent droit à 2 places gratuites ;
- 42 donnent droit à 1 place gratuite ;
- les autres billets ne gagnent rien.

Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de places gratuites gagnées avec un billet. Donner la loi de probabilité de X .

$3 + 6 + 42 = 51$ billets sont gagnants. Donc $120 - 51 = 69$ billets sont perdants.

46 Une partie de loterie consiste à lâcher une bille dans un appareil avec six portes de sortie, numérotées de 1 à 6. Soit X la variable aléatoire égale au numéro de la porte de sortie franchie par la bille. La loi de X est donnée par :

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

La règle du jeu est la suivante :

un joueur mise 2 € ; il reçoit 12 € si la bille franchit les portes 1 ou 6, 2 € si elle franchit les portes 3 ou 4. Les portes 2 et 5 ne rapportent rien.

Soit Y la variable aléatoire représentant le gain d'un joueur après une partie (compté positivement ou négativement).

1. Déterminer la loi de probabilité de Y .

2. Le jeu est-il équitable ?

1) Le joueur mise 2 €.

• s'il ouvre les portes 2 ou 5 il ne gagne rien et $Y = 0 - 2 = -2$ € ; $P(Y = -2) = P(X=2) + P(X=5) = \frac{10}{32}$

• s'il ouvre les portes 1 ou 6 il gagne 12 € et $Y = 12 - 2 = 10$ € ; $P(Y = 10) = P(X=1) + P(X=6) = \frac{2}{32}$

• s'il ouvre les portes 3 ou 4 il gagne 2 € et $Y = 2 - 2 = 0$ € ; $P(Y = 0) = P(X=3) + P(X=4) = \frac{20}{32}$

loi de probabilité de Y :

y_i	-2	0	10
$P(Y=y_i)$	$\frac{10}{32}$	$\frac{20}{32}$	$\frac{2}{32}$

→ 2) le jeu est équitable si $E(Y) = 0$
 or $E(Y) = -2 \times \frac{10}{32} + 0 \times \frac{20}{32} + 10 \times \frac{2}{32} = 0$ donc le jeu est équitable

Loi de probabilité de X

x_i	0	1	2	4
$P(X=x_i)$	$\frac{69}{120}$	$\frac{42}{120}$	$\frac{6}{120}$	$\frac{3}{120}$

Utiliser la loi de probabilité d'une variable aléatoire

39 La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	8
$P(X=x_i)$	0,1	0,25	0,15	0,05	0,1	0,2	0,1	a

1. Déterminer la valeur de a .

2. a. Calculer $P(X > 3)$.

b. Calculer $P(X \leq 5)$.

1. On sait que la somme des P_i est égale à 1,

$$\text{or } P_1 + P_2 + \dots + P_7 = 0,95$$

$$\text{Donc } 0,95 + a = 1$$

$$a = 1 - 0,95$$

$$\begin{aligned} 2a) P(X > 3) &= P(X \geq 4) = P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) + P(X=8) \\ &= 0,1 + 0,2 + 0,1 + 0,05 \\ &= 0,45 \end{aligned}$$

$$b) \bullet P(X \leq 5) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$$

$$\begin{aligned} \bullet P(X \leq 5) &= 1 - P(X \geq 6) \\ &= 1 - (P(X=6) + P(X=8)) \\ &= 1 - (0,1 + 0,05) \\ &= 1 - 0,15 \\ &= 0,85 \end{aligned}$$