CHAPITRE 11 : RAPPELS SUR LES FONCTIONS DE REFERENCE

I. Fonctions affines et fonctions linéaires

1. Définitions

Une fonction affine f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, où a et b sont deux nombres réels.
Lorsque $b = 0$, la fonction f définie par $f(x) = ax$ est une fonction linéaire.

Exemples :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x + 6$ est une fonction affine.

La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\frac{2}{7}x$ est une fonction linéaire.

2. Variations

Propriété :

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$

Si $a > 0$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Si $a < 0$, alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Si $a = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.

Remarque :

on peut souvent trouver l'expression d'une fonction affine sous la forme $f(x) = mx + p$.

Démonstration :

Soient x_1 et x_2 deux nombres réels tels que $x_1 < x_2$.

$f(x_2) - f(x_1) = (ax_2 + b) - (ax_1 + b) = a(x_2 - x_1)$

On sait que $x_1 < x_2$.donc $x_2 - x_1 > 0$.

Le signe de $f(x_2) - f(x_1)$ est le même que celui de a.

- Si $a > 0$, alors $f(x_2) - f(x_1) > 0$ soit $f(x_2) > f(x_1)$ ou encore $f(x_1) < f(x_2)$

  f conserve l'ordre sur $\mathbb{R}$ donc *f* est croissante sur $\mathbb{R}$.

- Si $a = 0$, alors $f(x_2) - f(x_1) = 0$ soit $f(x_2) = f(x_1)$.

  Donc *f* est constante sur $\mathbb{R}$.

- Si $a < 0$, alors $f(x_2) - f(x_1) < 0$ soit $f(x_2) < f(x_1)$ ou encore $f(x_1) < f(x_2)$

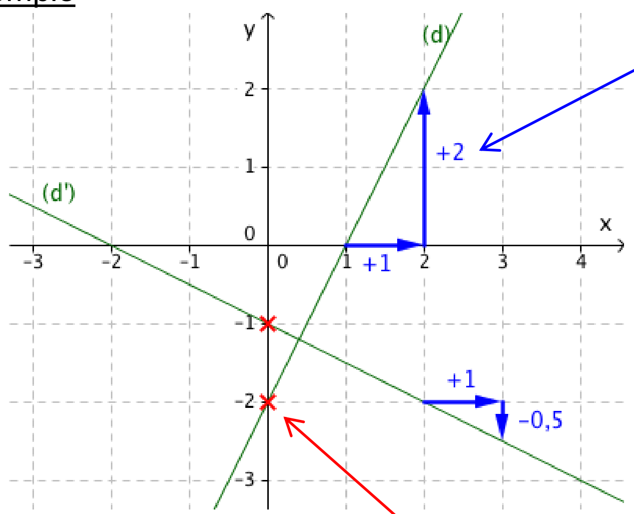
  f change l'ordre sur $\mathbb{R}$ donc *f* est décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. Représentation graphique

Vidéo https://youtu.be/fq2sXpbdJQg
Vidéo https://youtu.be/q68CLk2CNik
Vidéo https://youtu.be/OnnrfqztpTY

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.
Dans le cas d'une fonction linéaire, il s'agit d'une droite passant par l'origine du repère.
Dans le cas d'une fonction constante, il s'agit d'une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Exemple



2 est le coefficient directeur
(si on « **se déplace** en abscisse » de 1, on « monte en ordonnée » de **2**)

-2 est l'ordonnée à l'origine
(il se lit sur l'axe des ordonnées)

Pour *(d)* : Le coefficient directeur est 2
L'ordonnée à l'origine est -2

On peut donc dire que la fonction *f* représentée par la droite *(d)* est définie par
$f(x) = 2x - 2$ et que l'équation de la droite *(d)* est $y = 2x - 2$

Pour *(d')* : Le coefficient directeur est -0,5
L'ordonnée à l'origine est -1

On peut donc dire que la fonction *g* représentée par la droite *(d')* est définie par
$g(x) = -0{,}5x - 1$ et que l'équation de la droite *(d')* est $y = -0{,}5x - 1$

Pour la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$:

a est coefficient directeur et b est l'ordonnée à l'origine de la droite représentative d'équation $y=ax+b$

Propriété :
Si A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B) sont deux points distincts de la droite *(d)* représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$ alors : $a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Démonstration :

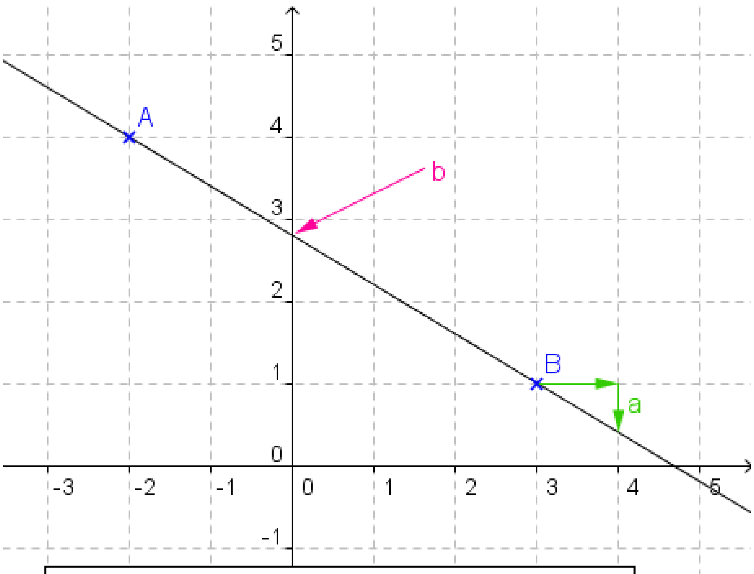
$y_B - y_A = f(x_B) - f(x_A) = (ax_B + b) - (ax_A + b) = a(x_B - x_A)$

Comme la droite (d) n'est pas verticale, $x_A \neq x_B$, et on a : $a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$.

Méthode : Déterminer l'expression d'une fonction affine

Vidéo https://youtu.be/0jX7iPWCWI4

Déterminer par calcul une expression de la fonction f telle que f (-2) = 4 et f (3) = 1.



La représentation graphique correspondant à la fonction affine f passe donc par les points A(-2 ; 4) et B(3 ; 1).

$a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

$a=\frac{1-4}{3-(-2)}=-\frac{3}{5}$

Comme A est un point de la droite, on a : f (-2) = 4

De plus : $f(x)=-\frac{3}{5}x+b$, donc on a :

$4=-\frac{3}{5}\times(-2)+b$ donc $b=\frac{14}{5}$.

D'où : $f(x)=-\frac{3}{5}x+\frac{14}{5}$

Remarque :
Le graphique permet de lire des valeurs approchées de *a* et *b*.

Attention : cette méthode graphique n'est pas précise mais permet d'avoir un ordre de grandeur des valeurs cherchées.

II. Fonction carré

Vidéo https://youtu.be/B3mM6LYdsF8

1. Définition

La fonction carré f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

2. Variations

Propriété :
La fonction carré f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0]$ et croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Démonstration :

- Soient a et b deux nombres réels quelconques positifs tels que $a < b$.

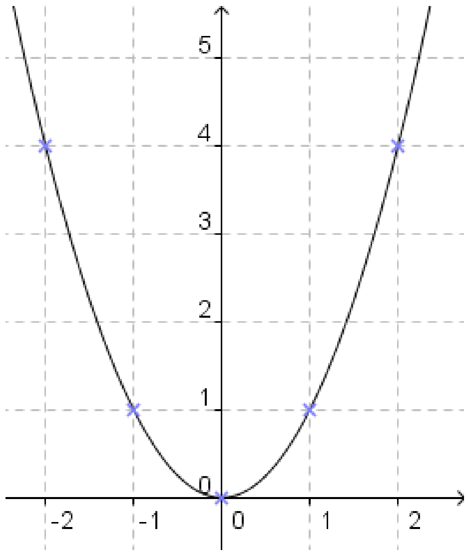
$f(b) - f(a) = b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$

Or $b - a > 0$, $a \geq 0$ et $b \geq 0$ donc $f(b) - f(a) \geq 0$ ce qui prouve que f est croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

- La décroissance sur l'intervalle $]-\infty; 0]$ est prouvée de manière analogue en choisissant a et b deux nombres réels quelconques négatifs tels que $a < b$.

3. Représentation graphique

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4



Remarques :

1) Le tableau de valeurs n'est pas un tableau de proportionnalité. La fonction carrée n'est donc pas une fonction linéaire.

2) Dans un repère (O, I, J), la courbe de la fonction carré est appelée une parabole de sommet O.

3) Dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction carré est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

III. Fonction inverse

Vidéo https://youtu.be/VI2rlbFF22Y

1. Définition

La fonction inverse f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Remarques :

- $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ désigne l'ensemble des nombres réels sauf 0, c'est-à-dire]-∞ ;0[U]0 ;+∞[. On peut aussi noter cet ensemble $\mathbb{R}^*$.
- La fonction inverse n'est pas définie en 0.

2. Variations

Propriété :
La fonction inverse est décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; 0[$ et décroissante sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Remarques :

Remarque 1 :
Les variations d'une fonction ne peuvent s'étudier que sur un intervalle.
On ne peut donc pas évoquer de décroissance sur]-∞ ; 0[U]0 ; +∞[**qui n'est pas un intervalle** mais conclure de manière séparée que la fonction inverse est décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; 0[$ et décroissante sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Remarque 2 : la fonction inverse est décroissante **sur chaque partie de son ensemble de définition** *c'est pourquoi quand on passe à l'inverse dans une inégalité, on obtient une inégalité de sens contraire.*

Démonstration du sens de variation:

- Soient a et b deux nombres réels **strictement positifs** avec $a < b$.

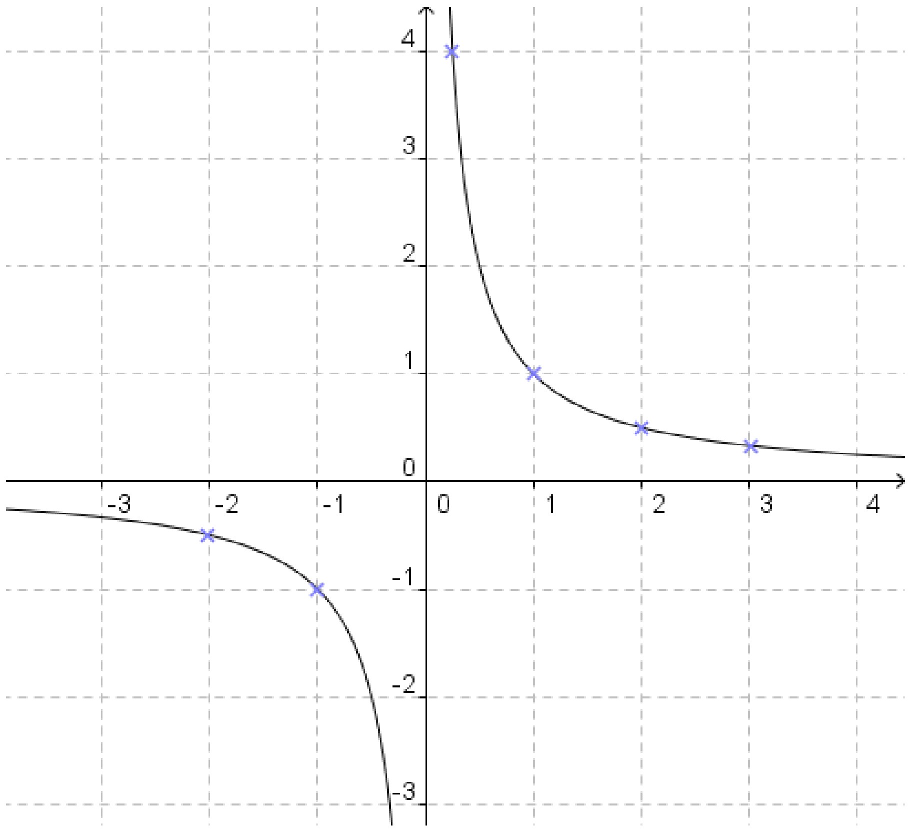
$$f(b) - f(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}.$$

Or $a > 0$, $b > 0$ et on a de plus $a - b < 0$. Il en résulte que $f(b) - f(a) \leq 0$.
f est ainsi décroissante sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

- La décroissance sur l'intervalle $]-\infty ; 0[$ est prouvée de manière analogue.

3. <u>Représentation graphique</u>

x	-2	-1	0,25	1	2	3
$f(x)$	-0,5	-1	4	1	0,5	$\frac{1}{3}$



<u>Remarques :</u>

1) Dans un repère (O, I, J), la courbe de la fonction inverse est une <u>hyperbole</u> de centre O.

2) La courbe de la fonction inverse est symétrique par rapport à l'origine.