CHAPITRE 13 : FONCTIONS POLYNÔME DU SECOND DEGRE

1. Définition

Une fonction polynôme de degré 2 f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des nombres réels donnés et $a \neq 0$.

Sa représentation graphique dans un repère du plan est appelée *parabole*.

Exemples :

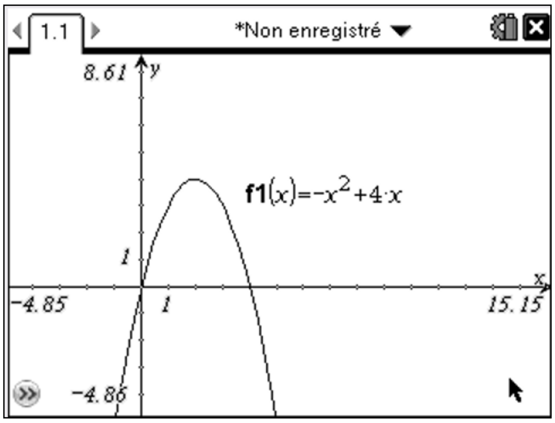
- $f(x) = 5x^2 - 4x + 9$. On a : a = 5, b = -4 et c = 9.

- $g(x) = -x^2 + 4x$. On a : a = -1, b = 4 et c = 0.

- La fonction carré est une fonction polynôme particulière telle que : a = 1, b = 0 et c = 0.

- $h(x) = (3x+1)(x-2)$.
  En effet : $h(x) = 3x^2 - 6x + x - 2 = 3x^2 - 5x - 2$.
  On a : a = 3, b = -5 et c = -2.

On peut tracer la courbe représentative d'une fonction polynôme à l'aide de la calculatrice graphique. Il s'agit d'une **parabole**.



Le mot parabole vient du grec « parabolê » qui signifiait l'action de jeter à côté : « para » pour à côté et « bolein » pour jeter.

2. Variations

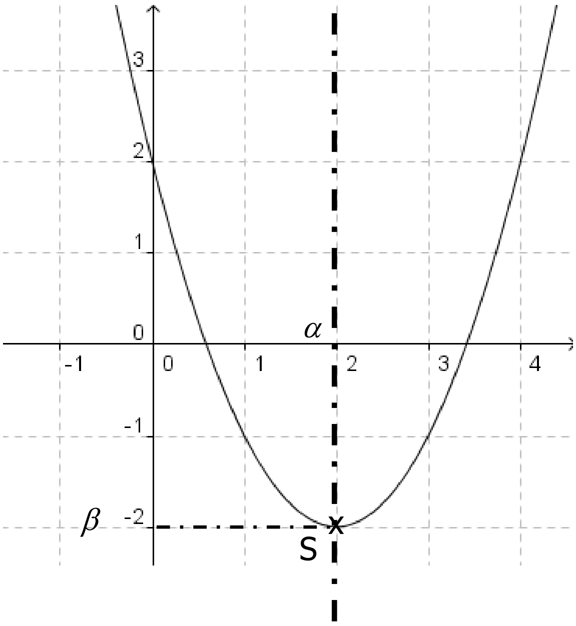
Propriétés :

Soit f une fonction polynôme de degré 2, telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$.

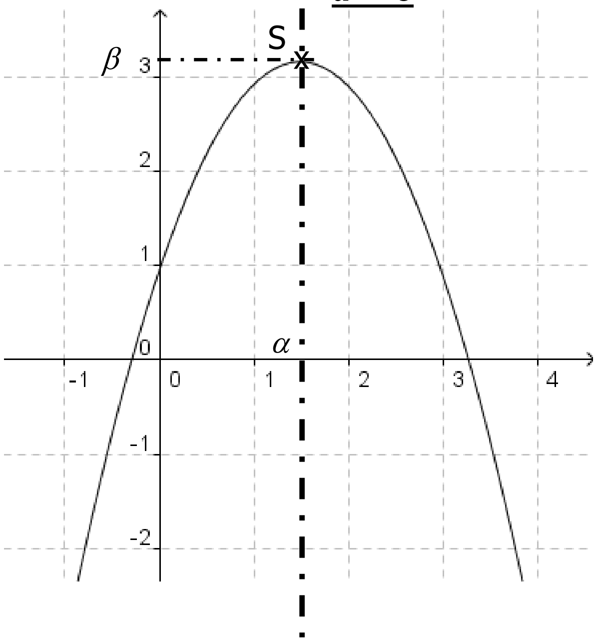
- Si a est positif, f est d'abord décroissante, puis croissante : la parabole est tournée vers le haut

- Si a est négatif, f est d'abord croissante, puis décroissante : la parabole est tournée vers le bas.

$a > 0$



$a < 0$



3. Extremum

La courbe représentative de f est une parabole qui admet un axe de symétrie parallèle à l'axe des ordonnées.

Définition :
Le point de la courbe qui correspond au maximum ou au minimum est appelé le sommet de la parabole.

Remarque : les coordonnées du sommet sont notées $S(\alpha;\beta)$

Exemple :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x$ admet un maximum.

En effet, le coefficient devant x^2 est -1 donc négatif. On en déduit que f est d'abord croissante, puis décroissante.

Propriétés :

- Soit f une fonction polynôme de degré 2, telle que $f(x)=ax^2+bx+c$.

  Alors f admet un extremum pour $x=-\frac{b}{2a}$.
- Les coordonnées du sommet de la parabole sont $(\alpha;\beta)$ avec :

  $\alpha=-\frac{b}{2a}$ et $\beta=f(\alpha)$
- $f(x)$ peut également s'écrire sous la forme $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$

  Cette expression est appelée « forme canonique » de $f(x)$

Méthode : Déterminer les coordonnées de l'extremum d'une fonction polynôme de degré 2

Vidéo https://youtu.be/KgsQl1ksdbA

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2-12x+23$.

a) Quelle est la nature de l'extremum de la fonction f ?
b) Déterminer les coordonnées de cet extremum.
c) En déduire la forme canonique de $f(x)=2x^2-12x+23$
d) Construire le tableau de variations de f. Vérifier en traçant la courbe représentative à l'aide de la calculatrice.

a) Le coefficient devant x^2 est positif, donc la parabole est tournée vers le haut et on en déduit que f admet un minimum.

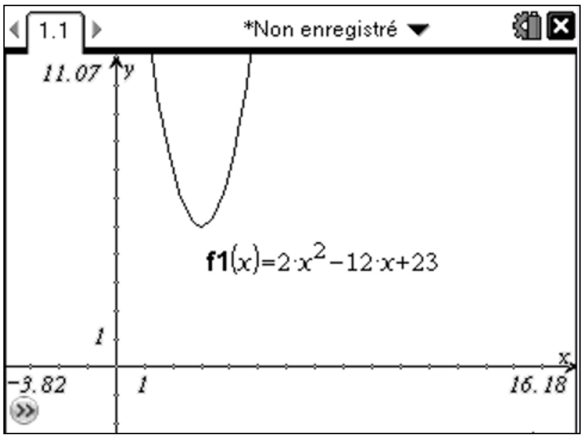
b) Le minimum est atteint en $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-12}{2\times 2}=3$

Or $f(3)=2\times 3^2-12\times 3+23=5$ donc f admet un minimum égal à 5 pour $x=3$.
Les coordonnées du minimum sont (3 ; 5). Ce sont les coordonnées du sommet.

c) La forme canonique de $f(x)=ax^2+bx+c$ est $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$. Ici on a $a=1$; $\alpha=3$ et $\beta=5$ donc $f(x)=(x-3)^2+5$

d)

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	↘	5	↗



On pourra tracer la parabole à l'aide d'une calculatrice graphique pour vérifier.