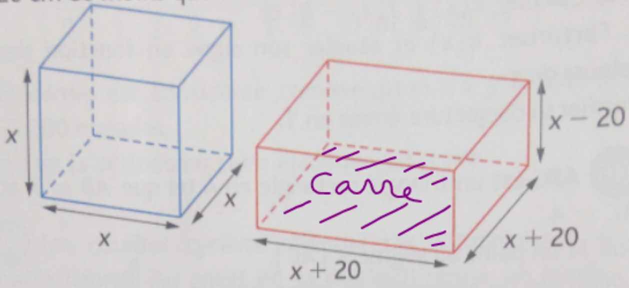
89 Dans l'espace

Soit x un réel strictement supérieur à 20.

On dispose de deux cuves :

– la première est un cube, de côté x cm ;

– la deuxième est un pavé droit à base carrée, dont le côté mesure 20 cm de plus que celui du cube ; sa hauteur mesure 20 cm de moins que celle du cube.



On souhaite déterminer les valeurs de x de façon que la cuve cubique ait le volume le plus grand.

1. Montrer que le problème se ramène à résoudre l'inéquation

(I) $x^2 - 20x - 400 \leqslant 0$.

2. Développer $(x-10)^2 - 500$.

3. Résoudre algébriquement le problème.

Volume de la cuve cubique :

$V_1 = x^3$

Volume de l'autre cube :

$V_2 = B \times h$

$= (x+20)^2 \times (x-20)$

1) $V_1 \geq V_2$.

$x^3 \geq (x+20)^2(x-20)$

$\iff (x+20)^2(x-20) - x^3 \leq 0$

$\iff (x^2+40x+400)(x-20) - x^3 \leq 0$

$\iff \cancel{x^3} - 20x^2 + 40x^2 - 800x + 400x - 8000 \cancel{-x^3} \leq 0$

$\iff 20x^2 - 400x - 8000 \leq 0$

$\xrightarrow{:20}$ $x^2 - 20x - 400 \leq 0$

$\iff \underbrace{(x-10)^2}_{a^2} - \underbrace{500}_{b^2} \leq 0$

$\iff [(x-10) - 10\sqrt{5}][(x-10) + 10\sqrt{5}] \leq 0$

$\iff \underbrace{(x - 10 - 10\sqrt{5})}_{\text{1ère ligne}} \underbrace{(x - 10 + 10\sqrt{5})}_{\text{2è ligne}} \leq 0$

2) $(x-10)^2 - 500$

$= x^2 - 20x + 100 - 500$

$= x^2 - 20x - 400$

* $x - 10 - 10\sqrt{5} = 0$

$\iff x = 10 + 10\sqrt{5}$.

* $x - 10 + 10\sqrt{5} = 0$

$\iff x = 10 - 10\sqrt{5}$

		$10-10\sqrt{5}$		$10+10\sqrt{5}$		$+\infty$
$x-10-10\sqrt{5}$	−		−	0	+	
$x-10+10\sqrt{5}$	−	0	+		+	
$x^2-20x-400$	+	0	−	0	+	

$x^2 - 20x - 400 \leq 0 \iff x \in [10 - 10\sqrt{5} ; 10 + 10\sqrt{5}]$