Fonctions de référence

Introduction

1. Programme

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Fonctions de référence Fonctions linéaires et fonctions affines. Variations de la fonction carré, de la fonction inverse.	• Donner le sens de variation d'une fonction affine. • Donner le tableau de signes de $ax + b$ pour des valeurs numériques données de a et b. • Connaître les variations des fonctions carré et inverse. • Représenter graphiquement les fonctions carré et inverse.	On fait le lien entre le signe de $ax + b$, le sens de variation de la fonction et sa courbe représentative. Exemples de non-linéarité. En particulier, faire remarquer que les fonctions carré et inverse ne sont pas linéaires.

2. Intention

Les généralités sur les fonctions ayant été revues et complétées dans le chapitre 1, il s'agit ici de les réinvestir pour étudier les fonctions dites « de référence ». En particulier on apprend à mettre en œuvre les définitions théoriques des fonctions croissantes et décroissantes pour étudier les variations des fonctions affines, carré et linéaires. On assoit, on complète, on réinvestit et on enrichit les connaissances du collège au sujet des fonctions linéaires et affines.
Du point de vue mathématique :
- On démontre et on retient le lien entre le signe de a et les variations de la fonction : $x \longmapsto ax + b$.
- On en déduit le signe de $ax + b$ et on fait le lien avec la courbe représentative.
- On justifie et on retient les variations des fonctions $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto \frac{1}{x}$, ainsi que l'allure de leurs représentations graphiques.

Les exercices visent avant tout à assurer un acquis solide de ces trois points.
Volontairement, il y a peu d'exercices sur des études de sens de variation, d'une part pour concentrer les énergies sur l'objectif précisé ci-dessus, d'autre part car le chapitre 4 permettra de revenir sur ce point.
La résolution de problèmes permet d'introduire les nouvelles notions et ensuite de réinvestir ces nouveaux acquis.

Savoir faire — Trouver l'expression d'une fonction affine et déterminer son sens de variation

1 f et g sont croissantes sur $\mathbb{R}$.

2 $a = -0{,}3 < 0$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$; alors $f(x) \in [f(5)\,;f(-3)]$; finalement, $f(x) \in [-0{,}5\,;1{,}9]$.

3 $a = \dfrac{-2-(-3)}{2-0} = \dfrac{1}{2} > 0$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.
Avec $f(0) = -3$ on obtient $b = -3$ et $f(x) = \dfrac{1}{2}x - 3$.
Donc $f(x) \in [f(-5)\,;f(5)]$; ainsi, $f(x) \in [-5{,}5\,;-0{,}5]$.

4 $\dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ et $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$ donc il y a proportionnalité et f est linéaire $\left(f(x) = \sqrt{2}\,x\right)$.

5

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

6 **1.** $f(x) = ax$ avec $a = \dfrac{10^2}{10^5} = 10^{-3}$.
2. f est croissante car a est positif.

Savoir faire — Utiliser les variations de la fonction carré

7 **1.** On considère deux réels quelconques a et b tels que $a \leqslant b \leqslant 1$.
On retranche 1 : $a-1 \leqslant b-1 \leqslant 0$.
On élève au carré des nombres négatifs donc $(a-1)^2 \geqslant (b-1)^2$.
Finalement $f(a) \leqslant f(b)$ et f est ainsi décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;1]$.
On considère deux réels quelconques a et b tels que $1 \leqslant a \leqslant b$.
On retranche 1 : $0 \leqslant a-1 \leqslant b-1$.
On élève au carré des nombres positifs donc $(a-1)^2 \leqslant (b-1)^2$.
Finalement $f(a) \leqslant f(b)$ et f est ainsi croissante sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.
2. a. f est décroissante sur $[-3\,;1]$ donc $0 \leqslant f(x) \leqslant 9$.
b. f est croissante sur $[2\,;5]$ donc $1 \leqslant f(x) \leqslant 16$.

8 **1.** Si $0 \leqslant a < b$ alors $a^2 < b^2$; en ajoutant -3, on obtient $f(a) < f(b)$; ainsi f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.
2. $f(\sqrt{3}) = 3 - 3 = 0$; d'après 1., si $x \geqslant \sqrt{3}$ alors $f(x) \geqslant f(\sqrt{3})$, c'est-à-dire $f(x) \geqslant 0$.

9 Sur $[-2\,;0]$, la fonction carré est décroissante donc $(-2)^2 \geqslant x^2 \geqslant 0^2$ et sur $[0\,;7]$, la fonction carré est croissante donc $0^2 \leqslant x^2 \leqslant 7^2$.
Finalement, $0 \leqslant x^2 \leqslant 49$.

10 Sur l'intervalle $[-2\,;0]$, la fonction carré est décroissante, donc, si $-2 \leqslant x \leqslant 0$ alors $4 \geqslant x^2 \geqslant 0$; et sur l'intervalle $[0\,;5]$, la fonction carré est croissante donc, si $0 \leqslant x \leqslant 5$ alors $0 \leqslant x^2 \leqslant 25$. Bilan :
si $-2 \leqslant x \leqslant 5$ alors $0 \leqslant x^2 \leqslant 25$.

Savoir faire — Utiliser les variations de la fonction inverse

11 **1.** Si $2 < a < b$ alors $0 < a-2 < b-2$ donc $\dfrac{1}{a-2} > \dfrac{1}{b-2}$; puis en multipliant par -2 : $f(a) < f(b)$.
Ainsi f est croissante sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$.
2. D'après **1.**, si $x \geqslant 3$ alors $f(x) \geqslant f(3)$ c'est-à-dire $f(x) \geqslant -2$; de plus, si $x \geqslant 3$, $x - 2 > 0$ donc $f(x) < 0$.

12 $-1 \leqslant 1 - \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{3}{4}$.

13 **1.** Conséquence directe des variations de la fonction inverse.
2. $f(x) \in \left[-\dfrac{11}{4}\,;-\dfrac{8}{3}\right]$.

14 **1.** $0 < \dfrac{1}{x} < 1$; **2.** $-2 \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant -0{,}5$.

15 x est l'inverse de $\dfrac{1}{x}$ et la fonction inverse est décroissante sur l'intervalle $[1\,;7]$ donc $\dfrac{1}{7} \leqslant x \leqslant 1$.

16 **1.** $f(x) = \dfrac{x}{x} + \dfrac{3}{x} = 1 + \dfrac{3}{x}$.
2. f est décroissante sur les deux intervalles (mêmes variations que la fonction inverse).
3. Même tableau de variation que la fonction inverse (cours p. 78).