Études de fonctions

Introduction

1. Programme

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Études de fonctions Fonctions polynômes de degré 2. Fonctions homographiques.	• Connaître les variations des fonctions polynômes de degré 2 (monotonie, extremum) et la propriété de symétrie de leurs courbes. • Identifier l'ensemble de définition d'une fonction homographique.	Les résultats concernant les variations des fonctions polynômes de degré 2 (monotonie, extremum) et la propriété de symétrie de leurs courbes sont donnés en classe et connus des élèves, mais peuvent être partiellement ou totalement admis. Savoir mettre sous forme canonique un polynôme de degré 2 n'est pas un attendu du programme. Hormis le cas de la fonction inverse, la connaissance générale des variations d'une fonction homographique et sa mise sous forme réduite ne sont pas des attendus du programme.

2. Intention

Les connaissances sur les fonctions de référence étant maintenant acquises, on aborde les fonctions polynômes de degré 2 et les fonctions homographiques. Outre le réinvestissement de tout le travail effectué sur les fonctions, ce chapitre donne également l'occasion de faire des calculs (algébriques, littéraux et numériques).

Du point de vue mathématique :

• On démontre et on retient qu'une fonction polynôme de degré 2 : $x \longmapsto ax^2 + bx + c$ est, soit croissante puis décroissante, soit décroissante puis croissante, selon le signe de a.

• On utilise la forme canonique $x \longmapsto a(x - \alpha)^2 + \beta$ pour obtenir les coordonnées du sommet et le tableau de variation.

• On exploite l'axe de symétrie de la parabole (en repère orthogonal) pour obtenir l'abscisse du sommet à partir de deux points de la parabole ayant la même ordonnée. On peut en particulier obtenir facilement les deux points d'ordonnée c (lorsqu'il y en a deux, c'est-à-dire lorsque $b \neq 0$).

• On apprend à reconnaître une fonction homographique, à déterminer et à écrire son ensemble de définition.

Le passage, par calcul algébrique, de la forme développée à la forme canonique n'est pas un objectif du programme mais, comme le précisent les documents-ressource, on a d'autres possibilités :

– Utiliser un logiciel de calcul formel.

– Utiliser la calculatrice pour conjecturer la valeur de α, calculer $\beta = f(\alpha)$ et développer la forme canonique obtenue pour vérifier.

– Utiliser deux points ayant la même ordonnée pour calculer la valeur de α, puis calculer $\beta = f(\alpha)$.

Les exercices mettent en application ces différentes méthodes.

Les résolutions de problèmes faisant intervenir des fonctions homographiques conduisent à faire quelques études de variation puisqu'aucun résultat général n'est dégagé dans le cours, conformément au programme.

• Savoir faire   Établir ou justifier le tableau de variation d'une fonction polynôme de degré 2

1 **a.**

x	$-\infty$	-9	$+\infty$
$f(x)$	↘	-15	↗

b.

x	$-\infty$	$0{,}5$	$+\infty$
$g(x)$	↘	$1{,}5$	↗

c.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{4}$	$+\infty$
$h(x)$	↗	$\frac{5}{4}$	↘

d.

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$k(x)$	↗	0	↘

2 $-\frac{2}{3}(x-6)^2+20=-\frac{2}{3}(x^2-12x+36)+20$
$=-\frac{2}{3}x^2+8x-4.$

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$f(x)$	↗	20	↘

3 Sur le tableau, on lit $\alpha=-10$ et $\beta=-100$.
On vérifie que $f(-10)=-100$.
De plus $(x+10)^2-100=x^2+20x+100-100$
$=x^2+20x$.
Cette forme canonique permet d'affirmer que f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;-10]$, puis croissante sur l'intervalle $[-10\,;+\infty[$.

4 **1.** $(x-3)(x+1)=x^2-2x-3$.
On a bien une fonction polynôme du second degré.
2. On conjecture le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	-4	↗

$f(x)=(x-1)^2-4$ et a positif.

• Savoir faire   Utiliser l'axe de symétrie d'une parabole

5 **1.** $f(1)=f(5)=1$.
2. Comme f est une fonction polynôme du second degré, l'abscisse du sommet est $\frac{1+5}{2}=3$.
L'ordonnée du sommet est $f(3)=-7$.
On a donc pour sommet $S(3\,;-7)$.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	↘	-7	↗

6 **1.** $f(x)=2 \Leftrightarrow -3x^2+x=0$
$\Leftrightarrow x(-3x+1)=0$
$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=\frac{1}{3}$.
2. On a donc $f(0)=f\left(\frac{1}{3}\right)=2$. L'abscisse du sommet S est
$\frac{0+\frac{1}{3}}{2}=\frac{1}{6}$; de plus on a $f\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{25}{12}$.
Finalement $S\left(\frac{1}{6}\,;\frac{25}{12}\right)$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{6}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	$\frac{25}{12}$	↘

7 **1.** Comme $f(0)=f(2)$, le sommet de la parabole a pour abscisse $\frac{0+2}{2}=1$, donc $m=1$.
2. Comme f est croissante puis décroissante, le réel a est négatif.
3. $f(x)=-2(x-1)^2+3=-2(x^2-2x+1)+3$
$=-2x^2+4x+1$.
Donc $b=4$ et $c=1$.

8 **a.** Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}\backslash\{-5\}$;
f est une fonction homographique car $f(x)=\frac{-3x-13}{x+5}$.
b. Domaine de définition : $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.
$f(x)=\frac{x^2-x-1}{x-1}$
et f n'est pas une fonction homographique.