

CHAPITRE 15

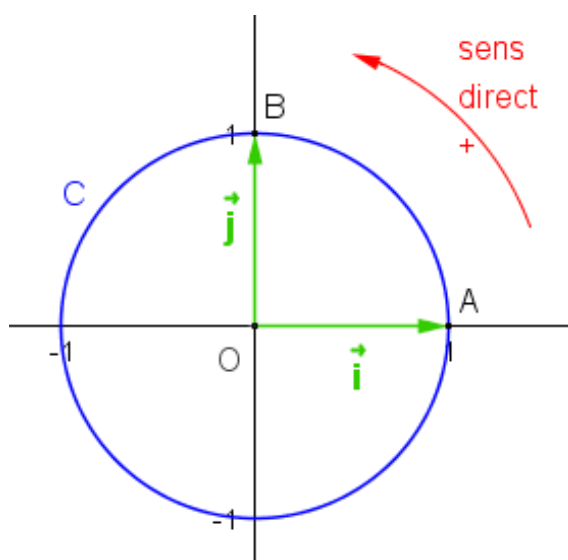
TRIGONOMETRIE

I. Le cercle trigonométrique

Définition : Sur un cercle, on appelle sens direct, sens positif ou sens trigonométrique le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Définition :

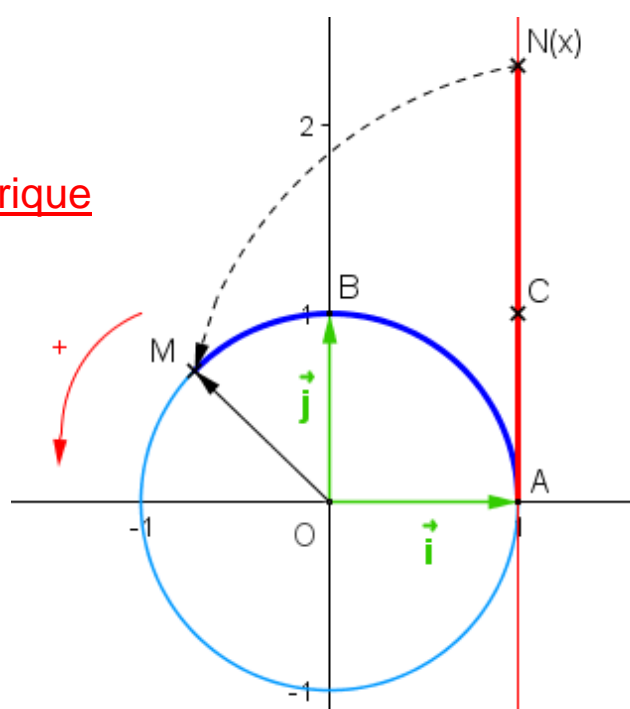
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ et orienté dans le sens direct, le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1.



II. Enroulement de la droite numérique

1) Définition de l'enroulement

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère le cercle trigonométrique et une droite (AC) tangente au cercle en A et orientée telle que $(A; \vec{j})$ soit un repère de la droite.



Si l'on « enroule » la droite autour du cercle, on associe à tout point N d'abscisse x de la droite orientée un unique point M du cercle.

La longueur de l'arc \widehat{AM} est ainsi égale à la longueur AN.

2) Correspondance entre abscisse et angle

La longueur du cercle trigonométrique est égale à 2π .

En effet, son rayon est 1 donc $P = 2\pi R = 2\pi \times 1 = 2\pi$

Après enroulement, le point N d'abscisse 2π sur la droite orientée se trouve donc en A sur le cercle. Cela correspond à un tour complet.

Ainsi au nombre réel 2π (abscisse de N sur la droite orientée) on fait correspondre un angle de 360° (mesure de \widehat{AOM}).

Par proportionnalité, on obtient les correspondances suivantes :

Abscisse du point N sur la droite orientée	-2π	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
Angle \widehat{AOM} en degré	-360°	-180°	-90°	-45°	0°	45°	90°	180°	360°

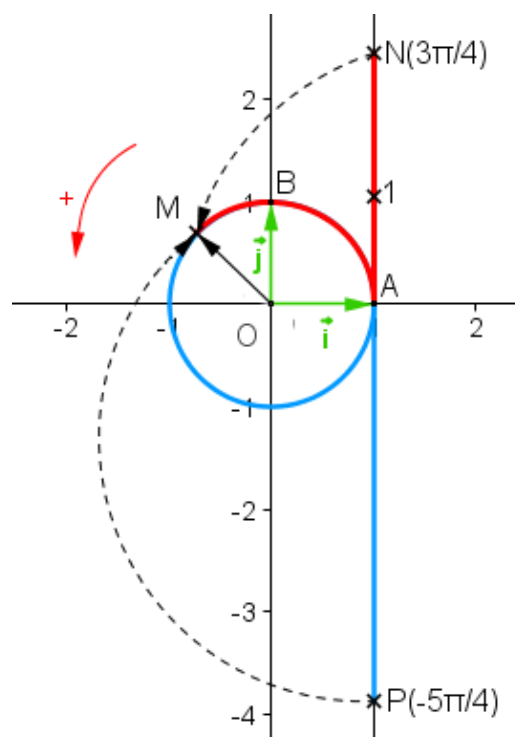
3) Plusieurs abscisses pour un seul point

A plusieurs points de la droite orientée on peut faire correspondre un même point du cercle.

La droite orientée peut en effet s'enrouler plusieurs fois autour du cercle.

Exemples :

Ci-contre, les points N et P d'abscisses $\frac{3\pi}{4}$ et $-\frac{5\pi}{4}$ correspondent tous les deux au point M.

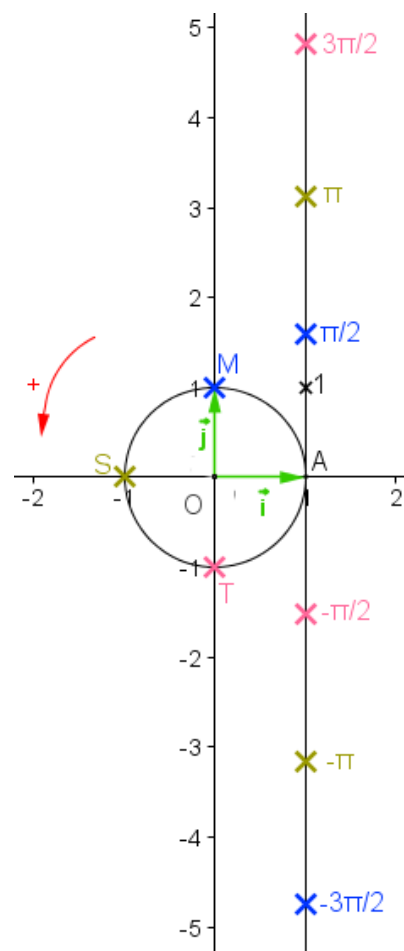


Sur la droite orientée, les points d'abscisses $\frac{\pi}{2}$ et

$-\frac{3\pi}{2}$ correspondent tous les deux au point M du cercle trigonométrique.

Les points d'abscisses π et $-\pi$ correspondent tous les deux au point S du cercle trigonométrique.

Les points d'abscisses $\frac{3\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ correspondent tous les deux au point T du cercle trigonométrique.



Méthode : Déterminer un point défini par enroulement autour du cercle trigonométrique

▶ Vidéo https://youtu.be/Fk_YO30jXn8

▶ Vidéo <https://youtu.be/NpcTSa6pwk8>

1) On enroule la droite orientée des réels sur le cercle trigonométrique de centre O.

Déterminer le point M du cercle associé au réel $\frac{9\pi}{4}$ dans cet enroulement.

2) Placer sur le cercle trigonométrique le point N correspondants à l'angle 480° .

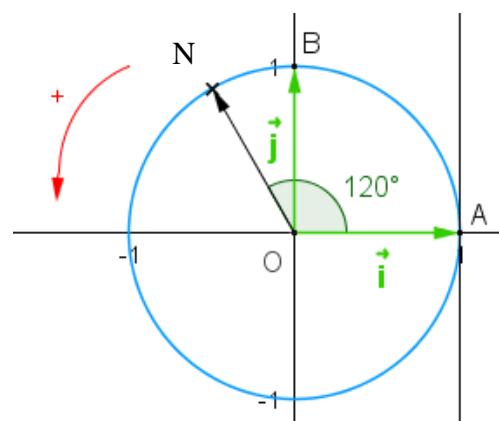
Solution :

$$1) \frac{9\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4}$$

L'enroulement effectué correspond à un tour complet

du disque (2π) suivi d'un huitième de tour ($\frac{\pi}{4}$).

Le point M se trouve donc sur le cercle trigonométrique tel que $\widehat{AOM} = 45^\circ$.



$$2) 480^\circ = 360^\circ + 120^\circ$$

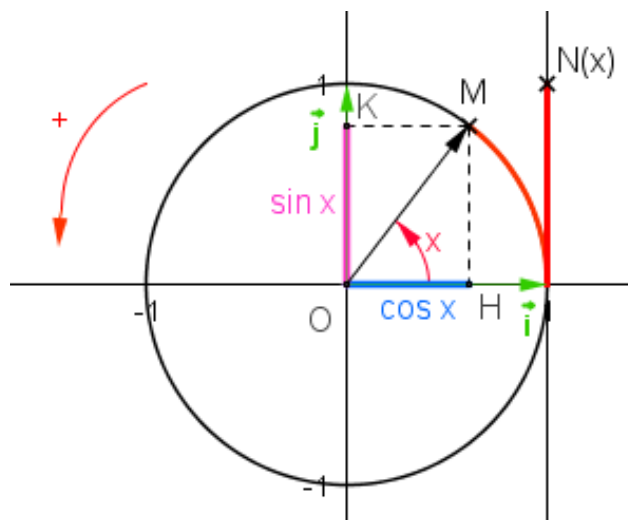
Le point N se trouve donc sur le cercle trigonométrique tel que $A\hat{O}N = 120^\circ$.

III. Sinus et cosinus d'un nombre réel

1) Définitions :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ et orienté dans le sens direct, on considère un cercle trigonométrique de centre O et de rayon 1.

Pour tout nombre réel x , considérons le point N de la droite orientée d'abscisse x . À ce point, on fait correspondre un point M sur le cercle trigonométrique. On appelle H et K les pieds respectifs des perpendiculaires à l'axe des abscisses et à l'axe des ordonnées passant par M.

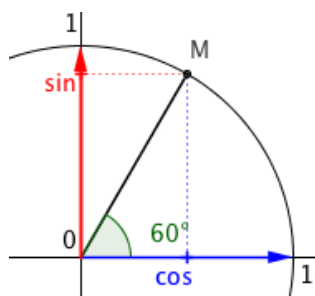


Définitions :

Le cosinus du nombre réel x est l'abscisse de M et on note **cos x** .

Le sinus du nombre réel x est l'ordonnée de M et on note **sin x** .

Exemple :

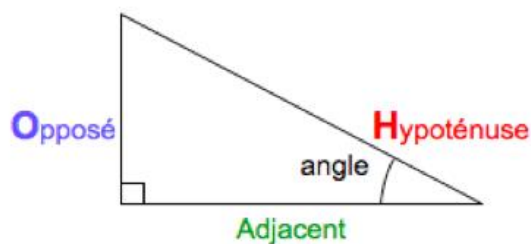


On lit sur l'axe des abscisse : $\cos 60^\circ = 0,5$.

2) Lien avec la trigonométrie vue dans le triangle rectangle :

Rappel :

Dans un triangle rectangle :



$$\text{Cos (angle)} = \frac{\text{Adjacent}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$\text{Sin (angle)} = \frac{\text{Opposé}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$\text{Tan (angle)} = \frac{\text{Opposé}}{\text{Adjacent}}$$

M. Trigo te dit :

CAH SOH TOA*



Ainsi dans le triangle OHM rectangle en H, on a :

$$\cos x = \frac{OH}{OM}$$

Or $OM = 1$, donc :

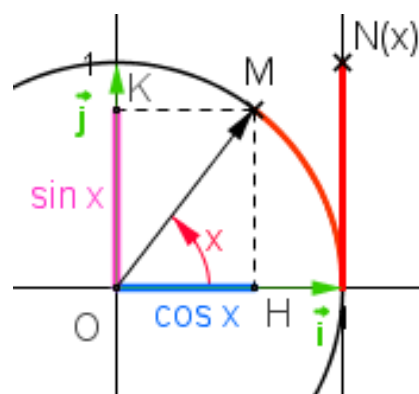
$$OH = \cos x$$

$\cos x$ est donc l'abscisse de M.

On a également :

$$\sin x = \frac{MH}{OM} = \frac{OK}{OM} = OK$$

$\sin x$ est donc l'ordonnée de M.



3) Valeurs particulières :

Valeurs remarquables des fonctions sinus et cosinus à connaître :

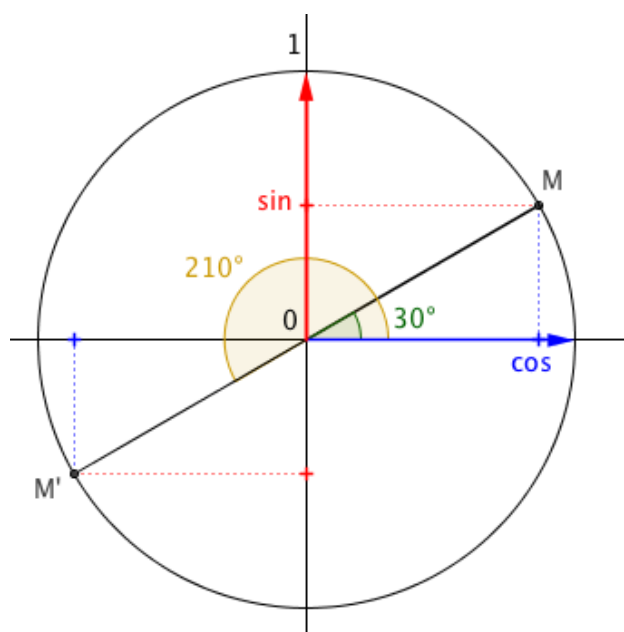
x	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Exemple :

A partir des valeurs particulières connues, trouver par symétrie le sinus et le cosinus de l'angle 210° .

$$\cos(210^\circ) = -\cos(30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(210^\circ) = -\sin(30^\circ) = -\frac{1}{2}$$

Méthode : Résoudre une équation trigonométrique

► Vidéo <https://youtu.be/VbfA7HGleLw>

Pour x compris entre 0° et 180° , résoudre l'équation suivante :

$$\sin x = 0,5.$$

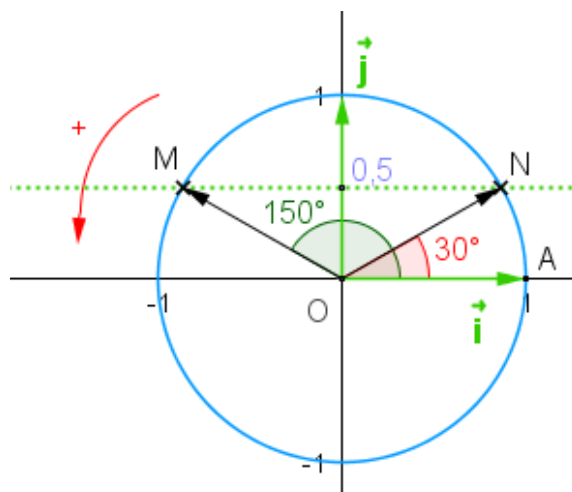
On trace la parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point d'ordonnée 0,5.

Sur le cercle trigonométrique, on peut lire pour $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ les points correspondants à $\sin x = 0,5$.

Il s'agit des points M et N tel que :

$$\widehat{AOM} = 150^\circ \text{ et } \widehat{AON} = 30^\circ$$

Ainsi $x = 30^\circ$ ou $x = 150^\circ$

4) Propriétés :

Propriétés : Pour tout nombre réel x , on a :

$$1) -1 \leq \sin x \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \cos x \leq 1$$

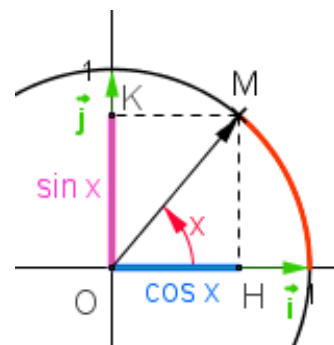
$$2) \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$3) \sin(-x) = -\sin x \quad \text{et} \quad \cos(-x) = \cos x$$

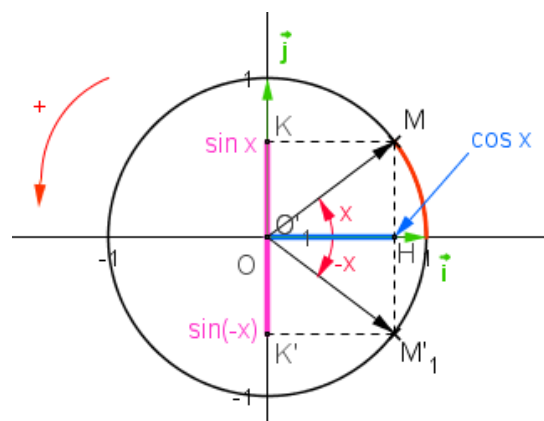
Remarque : $(\sin x)^2$, par exemple, se note $\sin^2 x$.

Démonstrations :

- 1) Le cercle trigonométrique est de rayon 1 donc :
 $-1 \leq \sin x \leq 1$ et $-1 \leq \cos x \leq 1$.
- 2) Dans le triangle OHM rectangle en H, le théorème de Pythagore permet d'établir que :
 $\cos^2 x + \sin^2 x = OM^2 = 1$.



- 3) Les angles de mesures x et $-x$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses donc :
 $\sin(-x) = -\sin x$ et $\cos(-x) = \cos x$.



Méthode : Calculer le cosinus d'un angle connaissant son sinus

📺 Vidéo <https://youtu.be/VfzFIEId56A>

Soit x un nombre réel. Calculer $\cos x$ sachant que $\sin x = \frac{3}{5}$.

On sait que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, soit :

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}.$$

Soit encore :

$$\cos x = \frac{4}{5} \quad \text{ou} \quad \cos x = -\frac{4}{5}.$$

Exercice 1

Pour x compris entre 0° et 360° , résoudre les équations suivantes :

a) $\sin x = -0,5$ b) $\sin x = 1$ c) $\sin x = -1$ d) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 2

Pour x compris entre 0° et 360° , résoudre les équations suivantes :

a) $\cos x = -1$ b) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\cos x = 2$ d) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 3

Pour x compris entre 0° et 360° , résoudre les équations suivantes :

a) $\cos x = 0,5$ b) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\sin x = -1,1$