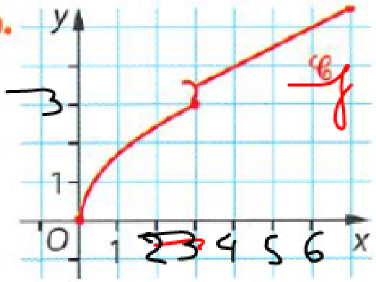
42 Reconnaître graphiquement la continuité

Pour chaque fonction définie sur [0 ; 7] et connue par sa courbe représentative $\mathcal{C}$, indiquer si elle est continue sur [0 ; 7].
Sinon, préciser les intervalles sur lesquels la fonction est continue.

a.

b.



a) on trace $\mathcal{C}_h$ de façon continue sur $[0;7]$ c'est à dire sans lever le crayon.
on peut donc conclure que la fonction h est continue sur $[0;7]$

b) la courbe $\mathcal{C}_f$ est obtenue en levant le crayon en $x=3$.
donc la fonction f n'est pas continue sur $[0;7]$
Elle est continue sur $[0;3]$ et sur $]3;7]$.

43 Fonction par morceaux

On considère la fonction f telle que :

- sur $[0 ; 1]$, $f(x) = -3x^2 + x + 3$;
- sur $]1 ; 9]$, $f(x) = \sqrt{x}$.

a. La fonction f est-elle continue sur $[0 ; 9]$?

44 Investissement dans une entreprise

Une entreprise fabrique entre 10 000 et 50 000 composants électroniques par mois.

Lorsque sa production mensuelle dépasse 40 000 composants, elle doit faire appel à un prestataire extérieur, ce qui l'oblige à un investissement et augmente ses coûts.

La fonction coût total est donnée sur $[10 ; 50]$ par :

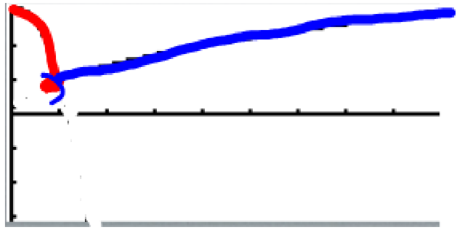
$$C(x) = \begin{cases} 4x, \text{ pour } 10 \leqslant x \leqslant 40 \\ x^2 - 75x + 1\,650, \text{ pour } 40 < x \leqslant 50 \end{cases}$$

où x est la quantité mensuelle de composants fabriqués, en millier, et $C(x)$ est exprimée en centaine d'euros.

a. Calculer le coût total de fabrication de 10 000, 40 000 et 50 000 composants.

b. La fonction C est-elle continue sur $[10 ; 50]$?

a) Il faut étudier la continuité en $x = 1$



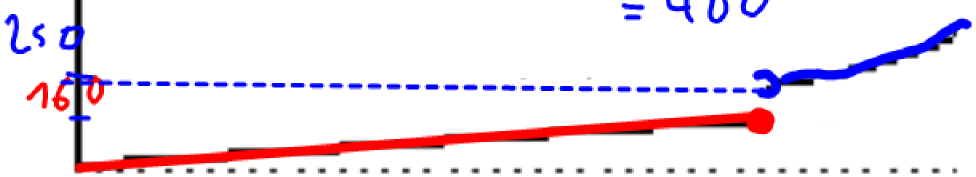
Calculons $f(1)$ avec la première formule : $f(1) = -3 \times 1^2 + 1 + 3$
$= 1$

De plus avec la $2^{ème}$ formule on a $\sqrt{1} = 1$

donc f est continue en $x = 1$
et donc sur $[0 ; 9]$

a) $C(40) = 4 \times 40 = 160$

pour info $C(10) = 4 \times 10 = 40$
$C(50) = 50^2 - 75 \times 50 + 1650$
$= 400$



b) D'une part
$C(40) = 4 \times 40$
$= 160$

D'autre part
$40^2 - 75 \times 40 + 1650$
$= 250$

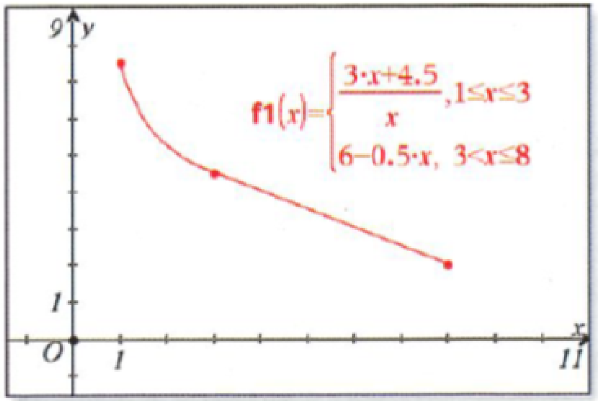
donc

45 Demande discontinue ?

La demande d'un produit, en tonne, est modélisée par l
fonction *f* représentée ci-dessous, pour un prix *x* variar
de 1 à 8 euros le kg.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x+4{,}5}{x}, & \text{pour } x\in[1\,;3] \\ 6-0{,}5x, & \text{pour } x\in\,]3\,;8]\end{cases}.$$

Conjecturer la continuité et le sens de variation de cett
demande. Par calculs, établir ces conjectures.



a) $\mathcal{C}_f$ semble pouvoir être tracée sans lever le crayon sur tout l'intervalle $[1;8]$

donc on conjecture que f est continue sur $[1;8]$

la courbe descent, donc on conjecture que la fonction est décroissante sur $[1;8]$

Il faut étudier la ~~contin~~ continuité en $x=3$.

1ère formule : $f(3)=\dfrac{3\times3+4{,}5}{3}=4{,}5$

2ème formule $f(3) = 6-(0{,}5\times3)$

$f(3) = 4{,}5$

Donc f est continue en $x=3$ et donc sur $[1;8]$.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x+4,5}{x}, \text{ pour } x\in[1;3] \\ 6-0,5x, \text{ pour } x\in]3;8]\end{cases}.$$

pour tout $x\in[1;3]$

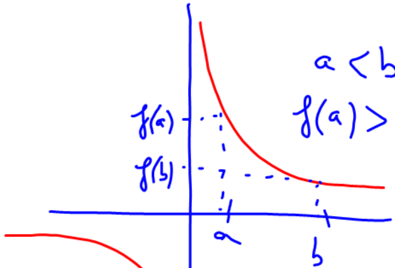
$$f(x)=\frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}}+\frac{4,5}{x}=3+\frac{4,5}{x}$$

Rappel :

pour tout $1\leq x\leq 3$

on a : $\frac{1}{1}\geq\frac{1}{x}\geq\frac{1}{3}$

$4,5\times 1\geq\frac{4,5}{x}\geq\frac{4,5}{3}$



$a<b$

$f(a)>f(b)$

Démontrons que f est décroissante sur $[1;3]$.

Soit a et b réels de $[1;3]$ tq $a<b$. Comparons $f(a)$ et $f(b)$.

$$a<b.$$
$$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$$
$$\frac{4,5}{a}>\frac{4,5}{b}$$
$$3+\frac{4,5}{a}>3+\frac{4,5}{b}$$
$$f(a)>f(b)$$

f change l'ordre sur $[1;3]$ donc elle est décroissante sur $[1;3]$.

Sur $]3;8]$ $f(x)=6-0,5x$.

f est une fonction affine de coefficient $-0,5<0$ donc décroissante sur $]3;8]$.

46 Continuité de l'offre

L'offre des producteurs sur le marché des choux-fleurs est modélisée par la fonction f telle que :

$$f(x)=\begin{cases} 5-\dfrac{6}{x+3}, \text{ pour } 0 \leqslant x \leqslant 4 \\ 0{,}1(x-1)^2+2, \text{ pour } 4 < x \leqslant 8 \end{cases}$$

où x est la quantité offerte, en centaine de tonnes, et $f(x)$ le prix en euro par cageot de 10 kg.

1 a. Calculer le prix au kg pour une offre de 300 tonnes, puis une offre de 450 tonnes.

b. S'il se vend 500 tonnes, calculer le prix d'un cageot de 10 kg. En déduire le chiffre d'affaires dégagé par la totalité de cette vente, exprimé en euro.

2 a. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;4]$, puis sur $]4;8]$.

b. Étudier la continuité de cette fonction d'offre.

c. Cette fonction d'offre est-elle monotone pour une quantité de 0 à 800 tonnes ?

3 Le prix du marché s'établit à 3,6 € le cageot de 10 kg. Déterminer les quantités offertes à ce prix.

1a. 300 tonnes correspond à $x=3$.
450 tonnes : $x=4,5$.

• pour $x=3$: $f(3)=5-\dfrac{6}{3+3}$
$=5-\dfrac{6}{6}=5-1=4$

le cageot de 10 kg est vendu 4 €
donc le prix au kg est de 0,4 €.

• pour $x=4,5$: $f(4,5)=0,1\times3,5^2+2$
$=0,1\times12,25+2$
$=3,225$.

le cageot de 10 kg est vendu 3,225 € soit un prix au kg de 0,3225 €

b. pour $x=5$: $f(5)=0,1\times(5-1)^2+2$
$=0,1\times16+2$
$=3,6$.

Soit 0,36 € le kg.

Sachant que 500 tonnes $=500\times1000$ kg
$=500\times100\times10$ kg
$=\underbrace{50000}_{\text{nbr de cageots}}\times10$ kg

Soit un chiffre d'affaires de $50\,000\times3,6=180\,000$ €

46 Continuité de l'offre

L'offre des producteurs sur le marché des choux-fleurs est modélisée par la fonction f telle que :

$$f(x)=\begin{cases} 5-\dfrac{6}{x+3}, \text{ pour } 0 \leqslant x \leqslant 4 \\ 0{,}1(x-1)^2+2, \text{ pour } 4 < x \leqslant 8 \end{cases}$$

où x est la quantité offerte, en centaine de tonnes, et $f(x)$ le prix en euro par cageot de 10 kg.

1 a. Calculer le prix au kg pour une offre de 300 tonnes, puis une offre de 450 tonnes.

b. S'il se vend 500 tonnes, calculer le prix d'un cageot de 10 kg. En déduire le chiffre d'affaires dégagé par la totalité de cette vente, exprimé en euro.

2 a. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;4]$, puis sur $]4;8]$.

b. Étudier la continuité de cette fonction d'offre.

c. Cette fonction d'offre est-elle monotone pour une quantité de 0 à 800 tonnes ?

3 Le prix du marché s'établit à 3,6 € le cageot de 10 kg. Déterminer les quantités offertes à ce prix.

2a. Etude des variations de f

• sur $[0;4]$.

Soit a et b 2 réels de $[0;4]$ tq $a<b$.

$a+3 < b+3$

$\dfrac{1}{a+3} > \dfrac{1}{b+3}$

$\dfrac{-6}{a+3} < \dfrac{-6}{b+3}$

$5-\dfrac{6}{a+3} < 5-\dfrac{6}{b+3}$

$f(a) < f(b)$

f conserve l'ordre sur $[0;4]$ donc elle est croissante sur $[0,4]$

• Autre méthode : f est dérivable sur $[0;4]$ et pour tout $x \in [0;4]$

$f'(x) = 0 - 6 \times \dfrac{-1}{(x+3)^2} = \dfrac{6}{(x+3)^2} > 0$ $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$

donc f est croissante sur $[0;4]$

• sur $]4;8]$

soit $4 < a < b \leqslant 8$

Comparons $f(a)$ et $f(b)$

$4-1 < a-1 < b-1 < 8-1$

$3 < a-1 < b-1 < 7$

$3^2 < (a-1)^2 < (b-1)^2 < 7^2$

$9 < (a-1)^2 < (b-1)^2 < 49$

$0{,}1 \times 9 < 0{,}1(a-1)^2 < 0{,}1(b-1)^2 < 0{,}1 \times 49$

$0{,}9 < 0{,}1(a-1)^2 < 0{,}1(b-1)^2 < 4{,}9$

$0{,}9+2 < 0{,}1(a-1)^2+2 < 0{,}1(b-1)^2+2 < 4{,}9+2$

$2{,}9 < f(a) < f(b) < 6{,}9$: f conserve l'ordre sur $]4;8]$ donc elle est croissante sur $]4;8]$.

b. étude de la continuité en $x=4$

pour $x=4$ on a :

d'une part

$f(4) = 5-\dfrac{6}{4+3}$

$= 5-\dfrac{6}{7}$

$= \dfrac{29}{7}$

d'autre part

$0{,}1(4-1)^2+2$

$= 0{,}1\times 3^2+2$

$= 0{,}9+2 = 2{,}9 = \dfrac{29}{10}$

$\dfrac{29}{7} \neq \dfrac{29}{10}$ donc f n'est pas continue en $x=4$

<< Reformulation de la question sur $[0;8]$, f est-elle monotone ?

continue et croissante
ou
continue et décroissante

f est monotone et croissante sur $[0;4]$ et sur $]4;8]$ mais elle n'est pas continue en $x=4$ donc on ne peut pas parler de monotonie sur tout l'intervalle $[0;8]$

3) Déterminons les antécédents éventuels de 3,6 par f.

sur $[0;4]$ $f(x)=3{,}6$

$\iff 5-\dfrac{6}{x+3} = 3{,}6$

$\iff -\dfrac{6}{x+3} = \dfrac{-1{,}4}{1}$ $\quad -5$

$x+3 = \dfrac{-6\times 1}{-1{,}4}$

$x+3 = \dfrac{30}{7}$

$x = \dfrac{30}{7}-3$

$= \dfrac{9}{7}$

$x^2 = k \iff x = \pm\sqrt{k}$

sur $]4;8]$ $f(x)=3{,}6$

$\iff 0{,}1(x-1)^2+2 = 3{,}6$

$\iff 0{,}1(x-1)^2 = 1{,}6$

$\iff (x-1)^2 = 16$

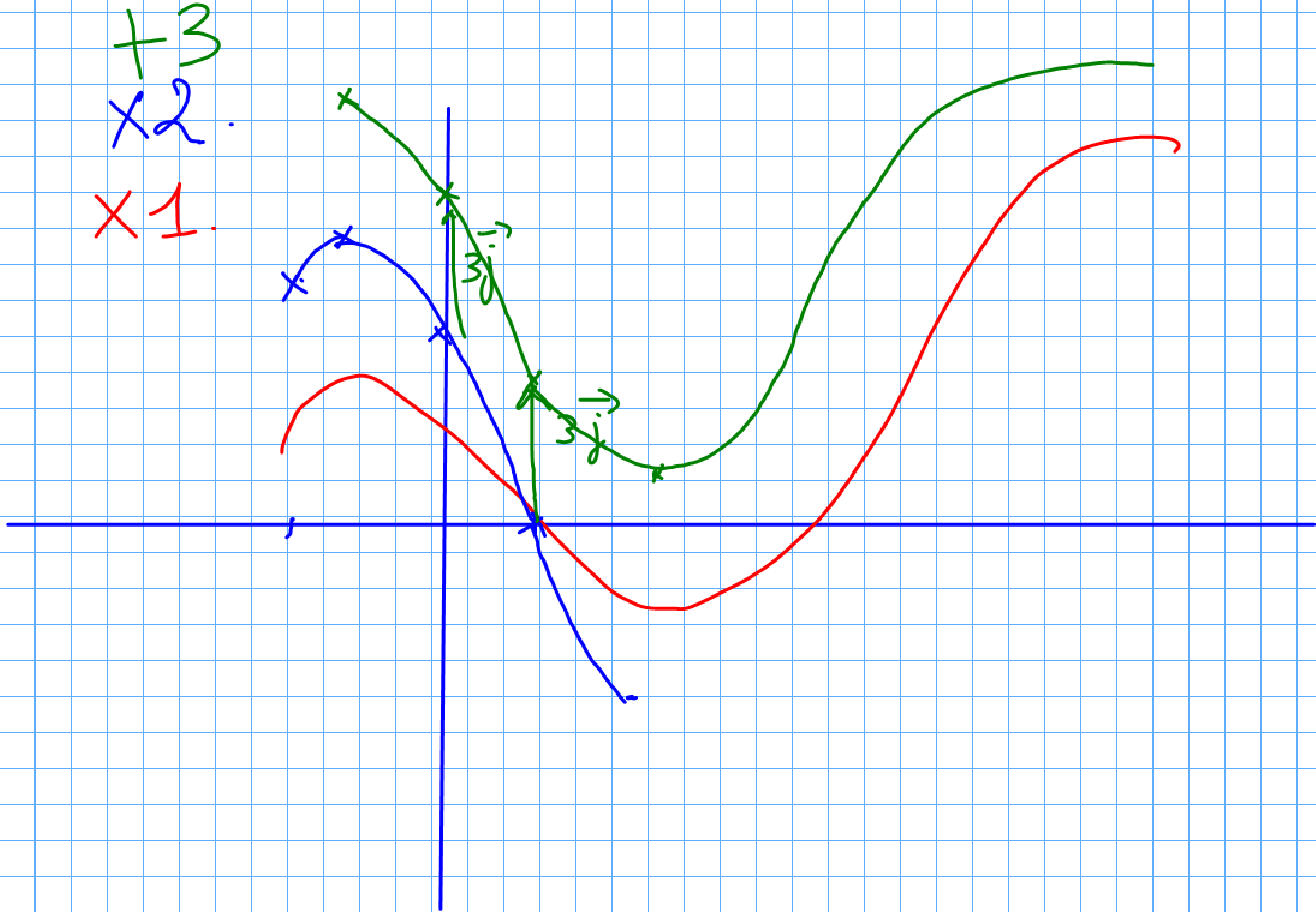
$\iff x-1=4$ ou $x-1=-4$

$\iff x=5$ ou $\cancel{x=-3}$ antécédent n'appartenant à $]4;8]$

1,285714286

Les antécédents de 3,6 par f sont $\dfrac{9}{7}$ et 5

soit une production d'environ 129 tonnes ou de 500 T



+3
×2
×1
3j
3j