Partie 1 : Diagnostic et algèbre

1- **Nous allons d'abord regarder quels sont les principaux enjeux du nouveau programme de 3e (2008) en ce qui concerne le calcul algébrique** tout en précisant à quelques reprises certains types de tâches mis en jeu de même que certains éléments technologiques et théoriques attendus en fin de troisième.

Le nouveau programme du collège est entre autre influencé par le socle commun de compétences inspiré lui-même des résultats d'études internationales telles que PISA ou TIMSS. Même si la plupart des points du programme antérieur demeure, la nouvelle mouture du programme de mathématiques, notamment en ce qui concerne le calcul algébrique, est orientée vers la recherche et la résolution de problèmes. Ceux-ci sont issus de préférence de la vie courante et en relation si possible avec certains thèmes de convergence (développement durable, météorologie, santé, sécurité...). D'après le programme de 2008, "au terme de la scolarité obligatoire, les élèves doivent avoir acquis les éléments de base d'une pensée mathématique. Celle-ci repose sur un ensemble de connaissances solides et sur des méthodes de résolution de problèmes et des modes de preuve".

Concernant le calcul littéral (je restreins volontairement ici le calcul algébrique au calcul littéral), cela se traduit par un développement des différents travaux dans plusieurs directions :

- l'utilisation du calcul littéral à mettre en lien avec le calcul numérique afin de parfaire celui-ci ou d'exprimer certaines "formules" ou propriétés (distributivité double et factorisation, propriétés des exposants, des radicaux, identités remarquables...)
- l'utilisation du calcul littéral pour la mise en équation et la résolution de problèmes. Celle-ci a pour objectif de conduire les raisonnements permettant de traiter différentes solutions à l'aide en particulier d'expressions littérales et de savoir choisir leurs écritures appropriées suivant la situation rencontrée (formes réduites, développées ou formes factorisées (notamment d'identités remarquables) dans certains cas pour pouvoir se ramener à une "équation produit" que l'on saura résoudre).
- l'utilisation du calcul littéral dans le but de prouver un résultat général (propriétés arithmétiques de certains nombres entiers, équivalence de programmes de calcul, démonstration de certaines propriétés concernant les radicaux voire l'irrationalité de la racine carrée de 2 par exemple)

Ces différents travaux concernant le calcul algébrique, dont la première approche s'effectue dès la 6ème, se poursuivent en 5ème et 4ème et se développent en 3ème en veillant à ce que les élèves donnent du sens aux activités entreprises. Le programme exclut tout type de virtuosité technique, l'essentiel étant que les élèves puissent assimiler progressivement le langage algébrique sous ses différents aspects (procédural et structural) et son emploi pour résoudre des problèmes. Au terme de l'année de troisième, les élèves doivent distinguer égalité, identité et équation et jongler avec différents statuts de la lettre (sans les expliciter) : variable, indéterminée, inconnue, paramètre. Ces travaux sur le calcul algébrique sont à mettre en lien en 3ème avec le travail sur les fonctions (notamment affines) et doivent favoriser la mise en oeuvre au lycée du travail sur l'analyse.

2-**Nous allons maintenant regrouper les exercices d'un test posé en fin de 3ème ou en début de seconde en fonction des aspects de l'activité algébrique qu'ils mettent en jeu prioritairement en nous inspirant du modèle de C.Kieran.**

Kieran distingue trois aspects de l'activité algébrique qui sont :
- l'activité "générationnelle" : elle concerne la formation des objets de l'algèbre (production d'expressions littérales...).
- l'activité "transformationnelle" : elle concerne le calcul algébrique et les activités basées sur l'usage des conventions d'écriture et les propriétés de calcul.
- l'activité "global/méta" : elle concerne la mobilisation de l'outil algébrique et la modélisation dans différents types de problèmes.

Activités	Exercices
Générationnelle	Exercice 3.1 - expression littérale de l'aire d'un rectangle.
	Exercice 3.2 - expression littérale de l'aire d'un rectangle ; a priori cette question fait appel à la transformation d'expressions littérales (donc il s'agirait a priori d'un aspect transformationnel) mais on pourrait considérer que certains élèves y répondent uniquement en observant la figure et en décomposant l'aire du "grand" rectangle en des aires de rectangles plus "petits".
	Exercice 6 - traduire une relation entre des variables.
	Exercice 7 - correspondance entre aire et expression littérale.
	Exercice 8.1 et 8.2 - condition d'égalité d'aires de figures : ces deux questions, à l'instar de l'exercice 3.1 nécessitent la production d'expressions littérales exprimant l'aire de figures planes simples.
	Exercice 9 - preuve et programme de calcul : une composante de l'exercice même si ce n'est pas son principal objet est de traduire le programme de calcul par une expression littérale adéquate.
	Exercice 10.2 - résoudre des problèmes affines et linéaires dans différents cadres : cette question nécessite la traduction algébrique d'énoncés du langage courant.
Transformationnelle	Exercice 1 - reconnaître des égalités numériques vraies.
	Exercice 2 - reconnaître des expressions littérales vraies.
	Exercice 3.2 - expression littérale de l'aire d'un rectangle ; il s'agit ici de donner différentes écritures équivalentes d'une expression littérale.
	Exercice 4 Déterminer si une égalité littérale est toujours vérifiée.
	Exercice 5- développer et factoriser une expression du second degré.
	Exercice 9 - preuve et programme de calcul ; pour mener la preuve à bien, il faudra savoir utiliser les techniques de calcul algébrique adéquates sur l'expression initiale.
Globale/ au niveau du meta	Exercice 8.3 - conditions d'égalité d'aires de figures.
	Exercice 9 - preuve et programme de calcul.

Activités	Exercices
	Exercice 10.1 - résoudre des problèmes affines et linéaires dans différents cadres.

En ce qui concerne la question 10.3 dont l'énoncé est absent mais dont on peut aisément deviner l'intitulé au vu de la réponse des étudiants, elle risque de troubler l'analyse car il n'est pas forcément nécessaire de passer par le cadre algébrique et la résolution d'une inéquation (comme l'ont fait certains élèves) pour déterminer le nombre de fois à partir duquel il est plus économique de choisir l'abonnement vu qu'une simple lecture graphique peut suffire.

3-D'une manière générale, on évalue si l'élève donne du sens aux calculs et expressions qu'il manipule. **Interrogeons-nous à présent sur les compétences et connaissances du programme de 3ème que chaque groupe d'exercices définis à la question précédente permet d'évaluer.**

a)Les activités transformationnelles permettent de repérer si un élève reconnaît la structure des expressions et les règles de formation (ou conventions) des écritures algébriques qu'il a mobilisées. En particulier les exercices 1 et 2 permettent d'évaluer si l'élève sait utiliser les propriétés opératoires des exposants, des radicaux et des nombres relatifs en écriture fractionnaire, s'il maîtrise la priorité des calculs dans une succession d'opérations vis à vis du parenthèsage, s'il connaît la définition de la racine carrée d'un nombre positif et s'il connaît certaines conventions d'écriture des calculs. Quant aux exercices 3, 4 et 5, ceux-ci permettent de repérer si l'élève est au point en ce qui concerne les transformations d'expressions littérales notamment en ce qui concerne la réduction, la distributivité simple et double, la factorisation et l'utilisation des identités remarquables L'exercice 5 permet notamment de repérer si l'élève reconnaît la structure d'une expression et utilise les identités mises en jeu en fonction du but visé. Ils permettent aussi de voir si l'élève est soit capable de tester si un nombre est solution d'une équation soit capable de la résoudre directement.

b)Les activités générationnelles comme l'exercice 3 et le début de l'exercice 8 donnent accès aux règles de traduction et de transformation utilisées par les élèves pour passer d'une représentation géométrique à une expression algébrique et permettent d'évaluer si l'élève sait exprimer l'aire d'une figure plane (en l'occurence un rectangle) par une expression littérale. L'exercice 6 permet de repérer si l'élève est capable de produire une expression littérale en sachant traduire correctement et algébriquement un énoncé donné en langage naturel.

c)Les activités "globales/méta" permettent de repérer si les élèves savent mobiliser leurs compétences algébriques dans le but de résoudre un problème ou de prouver un fait général. L'exercice 8 permet d'étudier les capacités des élèves à produire des expressions littérales en lien avec le cadre géométrique, à mettre un problème en équation pour rechercher les conditions d'égalité d'aires de deux figures puis à résoudre une équation du premier degré. L'exercice 9 permet de tester la capacité des élèves à mobiliser l'outil algébrique pour produire une expression algébrique résultant d'un programme de calcul puis prouver que l'expression est égale à un certain nombre entier. La génération de l'expression donne également accès au niveau de preuve mis en jeu, aux règles de traduction utilisées et aux règles de transformation utilisées pour développer et réduire une expression. L'exercice 10 permet d'étudier si l'élève fait le lien entre le cadre graphique et le cadre du langage naturel. Il peut éventuellement passer par le cadre intermédiaire qui est celui de l'algèbre avec le calcul littéral pour faire le lien avec les fonctions et reconnaître le "type" de fonction mis en jeu et alors l'associer à la représentation graphique correspondante. Cet exercice permet aussi, soit de voir si l'élève sait interpréter le graphique qu'il a devant lui pour répondre à un problème d'optimisation, soit de voir s'il est capable de mettre le problème en inéquation (ou en équation), de le résoudre et de conclure correctement.

4-Le professeur a décrit l'activité algébrique d'un élève à partir de trois composantes : (1-l'habileté et l'adaptabilité à faire du calcul algébrique dans des tâches variées ; 2-la capacité à traduire algébriquement des relations mathématiques exprimées par un graphique, une phrase, un dessin géométrique et réciproquement et 3-la capacité à utiliser l'algèbre pour résoudre des problèmes) dont il a pour chacune, distingué trois niveaux de compétence comme le présente le tableau ci-dessous :

Niveau	1	2	3
Calcul algébrique	Calcul intelligent et contrôlé	Calcul technique basé sur des règles syntaxiques souvent en aveugle	Calcul avec peu de signification et rôle des opérateurs non maîtrisés
Traduction	Traduction majoritairement correcte	Traduction parfois incorrecte liée à un manque de reformulation des relations mathématiques	Traduction souvent incorrecte, comme une écriture abréviative
Usage de l'algèbre	maîtrisé	adapté dans certains types de problèmes	non motivé, non compris, faible car limité dans les démarches arithmétiques

Ces trois composantes entretiennent un rapport très étroit avec les trois aspects de l'activité algébrique tels que les définit C.Kieran et que nous avons développé dans la réponse à la deuxième question.

Nous allons maintenant tenter de déterminer le niveau accordé par ce professeur à certains de ses élèves sur les trois composantes précédemment définies ; voici, ci-dessous, un tableau représentant les succès (1) ou les échecs (0) de chacun des 7 élèves à chacune des compétences testées. Les élèves sont regroupés suivant le groupe suggéré dans l'énoncé.

Les compétences sont classées en fonction de l'activité algébrique principale à laquelle elles appartiennent (voir question 2). Cependant, certains items, comme 8.3 et 9 font appel à plusieurs d'entre elles ; nous les avons donc placés simultanément dans plusieurs composantes : par exemple un raisonnement peut être juste mais avec des erreurs de calcul donc nous validerons l'aspect global et non l'aspect transformationnel. De même certaines productions d'expressions littérales peuvent s'avérer fausses mais les calculs qui suivent peuvent se révéler corrects et dans ce cas nous ne validerons pas l'aspect générationnel mais uniquement l'aspect transformationnel.

Lorsque plusieurs réponses sont possibles (comme dans l'exercice 1) et que l'une d'elles est fausse, nous considérons cela comme un échec, de même que s'il manque une réponse car dans ce cas cela signifie que l'élève la considère comme fausse.

Il arrive parfois que nous ne puissions pas répondre avec exactitude auquel cas nous écrivons”inconnu” car la réponse de l’élève manque d’éléments pour pouvoir lui attribuer avec certitude un succès pour un aspect précis.
Pour chaque compétence, nous effectuons ensuite la somme des points obtenus en considérant la validation ou non des items dans le but de déterminer leur niveau du point de vue du professeur.

Activité	Exercice	Sara	Selsalib	Nadir	Garance	Evelyne	Diana	Emeline
TRANSFORMATIONNELLE	1.1	1	0	0	1	0	1	0
	1.2	0	0	0	0	0	0	0
	1.3	0	1	0	0	0	0	0
	1.4	1	1	0	0	1	0	1
	2.1	1	1	1	1	1	1	0
	2.2	1	1	1	1	1	1	1
	2.3	1	1	1	1	0	1	1
	3.2	0	1	1	1	0	0	0
	4.1	1	1	1	1	1	0	0
	4.2	0	1	1	0	0	1	0
	4.3	1	1	1	1	1	1	1
	4.4	1	1	1	0	0	1	1
	4.5	1	1	1	1	1	1	1
	5.1	1	1	1	1	0	1	1
	5.2	1	1	0	0	1	1	1
	5.3	0	1	0	1	0	0	1
	5.4	0	0	0	0	0	0	0
	8.3	1	1	0	1	0	0	0
	9	0	inconnu	1	0	1	inconnu	inconnu,
Somme T (/19):		**12**	**15**	**11**	**11**	**8**	**10**	**9**
Niveau T :		**1(voire 2)**			**2**			**2**
GENERATI	3.1	1	1	1	1	1	0	0
	6	1	1	1	1	0	0	1
	7	0	1	0	0	1	0	0
	8.1	1	1	1	1	1	1	0
	8.2	0	0	0	0	0	0	0

Activité	Exercice	Sara	Selsalib	Nadir	Garance	Evelyne	Diana	Emeline
ONNE	9	1	0	1	0	1	0	0
	10.2	1	1	0	1	1	1	1
Somme G (/7) :		**5**	**5**	**4**	**4**	**5**	**2**	**2**
Niveau G :		**2(voire 1)**		**2(voire 1)**			**3**	
META	8.3	1	1	0	1	0	0	0
	9	1	inconnu	1	1	1	0	0
	10.1	1	1	1	1	1	1	1
	10.3	1	inconnu	0	inconnu	0	1	inconnu
Somme M (/3):		**4**	**2**	**2**	**3(?)**	**2**	**2**	**1**
Niveau M :		**1**		**2**			**3**	

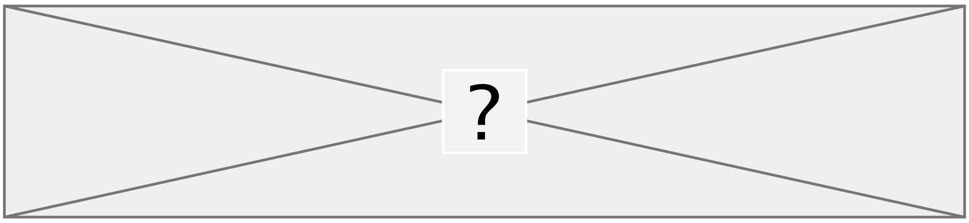
Faisons un bilan des résultats précédents :

Groupe	T	G	M
1 Sara & Selsalib	1(2)	2	1
2 Nadir & Garance & Evelyne	2	2	2
3 Diana & Emeline	2	3	3

Il est parfois difficile de distinguer à quels moments on attribue le niveau 1 ou le niveau 2 ; cela dépend du niveau de tolérance du professeur et de la marge d’erreur (à partir de quel pourcentage de bonnes réponses ?) qu’il accorde aux élèves pour leur attribuer tel ou tel niveau. En outre en ce qui concerne les aspects “générationnel” et “global/méta”, le nombre d’items proposés n’est pas forcément suffisamment important pour conclure de façon définitive. Je constate également une incohérence (que je ne parviens pas à expliquer) en ce qui concerne les résultats de Garance par rapport aux résultats de son groupe quant au critère méta. Peut être cela vient-il du fait que je lui ai attribué deux succès aux réponses 8.3 et 9 alors qu’en fait ses résultats finaux sont faux ; en même temps il a eu recours au calcul algébrique pour tenter de répondre à ces questions.

Partie 2 : Tableur et démarches de résolution

Il s’agit d’analyser et comparer différentes démarches de résolution (arithmétique, algébrique ou instrumentée par le tableur) du problème suivant :



L'objectif est de situer la technique de l'essai erreur en environnement papier par rapport à la stratégie arithmétique d'analyse/synthèse d'une part, et à la stratégie algébrique d'autre part ; puis d'analyser les caractéristiques de cette technique en environnement tableur pour examiner comment le tableur l'affecte, et modifie sa « place » par rapport aux techniques arithmétique et algébrique.

1-**Comparons d'abord les 3 démarches suivantes : analyse/synthèse, algébrique et essai/erreur.**

a)En ce qui concerne la méthode par essai/erreur, on peut par exemple partir d'une valeur fixée du nombre de chocolats pour l'un des groupes ou bien commencer par faire un partage équilibré du nombre de bonbons et ajuster en fonction des contraintes fixées par l'énoncé du problème. Quant à la méthode algébrique experte, elle conduit à un système linéaire d'équations du premier degré à 3 inconnues. Dans les deux cas, la solution du problème sera que chaque groupe d'enfants reçoit respectivement 10, 40 et 50 chocolats.

Après avoir appliqué la démarche par « essai/erreur », puis la démarche algébrique avec système d'équations au problème des chocolats, nous pouvons dresser le tableau suivant :

Démarche de résolution	**Type de calcul qui intervient**	**Type de résolution**	**Nature des objets mis en jeu**	**Principe ou démarche de résolution**	**Type de données utilisées**
arithmétique A/S	Numérique	Directe	Opérations arithmétiques	Calculs à effectuer	Connues
algébrique	Littéral	Indirecte (on passe par un système d'équations pour modéliser la situation)	Expressions littérales et équations.	Résolution d'un système linéaire d'équations du premier degré à trois inconnues	Connues et inconnues
essai/erreur en papier crayon	Numérique	Indirecte car plusieurs tests préalables.	Opérations arithmétiques lors de tests d'égalité.	Différents essais de valeurs pour réaliser des tests d'égalité.	Connues et inconnues pour lesquelles on substitue plusieurs valeurs de test

b)Le tableau précédent nous permet de comparer les trois méthodes mises en jeu et de situer la démarche essai/erreur par rapport aux deux autres ; cette dernière mêle à la fois certains aspects de la méthode arithmétique en ce qui concerne le type de calcul qui intervient, la nature des objets mis en jeu et le principe de résolution et d'autres de la démarche algébrique notamment le type de résolution et le type de données utilisées :

- la démarche d’essai/erreur possède un côté arithmétique dans la mesure où on manipule des expressions numériques et comme on teste des valeurs pour chacune des trois inconnues, toutes les données sont numériques et connues.
- la démarche d’essai erreur a un autre versant algébrique dans le sens où elle est indirecte car les résultats des calculs effectués ne sont pas les inconnues cherchées même si ils visent à les déterminer.

Notons également que le schéma correspondant à l’analyse du problème dans le cadre d’une démarche arithmétique (comme nous l’avons vu dans le cours à la dernière séance, voir le powerpoint diapositive 52 correspondant à la page 61) amène à produire l’équation (x)+(4x)+(4x+10)=100 qui est celle obtenu lorsque l’on résout dans le cadre algébrique le système d’équations par substitution. Il y a donc également un lien fort entre la méthode arithmétique et la méthode algébrique.

2-**Nous allons maintenant étudier les spécificités liées à l’usage d’un tableur dans la résolution du problème pour situer cette démarche par rapport aux trois précédentes.**

Résolvons le problème des chocolats à l’aide d’un tableur :

	A	B	C	D	E
1	Nombre de chocolats du premier groupe	Nombre de chocolats du deuxième groupe	Nombre de chocolats du troisième groupe	Nombre total de chocolats	
2		4*A2	B2+10	A2+B2+C2	
3	**1**	4	14	19	
4	**2**	8	18	28	
5	**3**	12	22	37	
6	**4**	16	26	46	
7	**5**	20	30	55	
8	**6**	24	34	64	
9	**7**	28	38	73	
10	**8**	32	42	82	
11	**9**	36	46	91	
12	**10**	40	50	100	
13	**11**	44	54	109	
14	**12**	48	58	118	
15	**13**	52	62	127	
16	**14**	56	66	136	
17	**15**	60	70	145	
18					
19					
20					
21					

a)Dans un premier temps, comparons la démarche globale ainsi que les calculs effectués par la méthode tableur et par la méthode arithmétique d’essai/erreur.

Les trois inconnues figurent explicitement dans la feuille de calcul contrairement à la donnée 100 dont on peut se passer mais que l’on doit garder en mémoire à l’instar de la méthode d’essai erreur. “On” teste différentes valeurs (voire toutes les valeurs entières jusqu’à un rang donné en “glissant” sur plusieurs lignes) pour le nombre de chocolats du premier groupe comme pour l’essai/erreur à la main mais le tableur se veut plus économique car ce dernier “automatise” les calculs. On a directement le résultat de la somme qui apparaît dans la colonne D. Les valeurs cherchées sont celles des cellules des trois colonnes précédentes et dont la ligne est celle où la somme est égale à 100 dans la colonne D. On se référera à la capture d’écran précédente qui illustre ces derniers propos. La démarche du tableur correspond donc à celle de l’essai/erreur.

b)Comparons maintenant les formules de la méthode tableur et les équations de l’algèbre.

Comme pour la démarche algébrique, les formules font appel à des “variables” : ici on change (ou substitue) automatiquement les valeurs numériques de l’une des inconnues du problèmes et les valeurs obtenues pour les autres inconnues sont algébriquement liées à la première.

On observe sur la capture d’écran que les formules insérées en B2 et C2 ressemblent à deux des équations intermédiaires du système ($y=4x$ et $z=y+10$) de la méthode algébrique. La cellule D2 est à mettre en relation avec l’équation $x+y+z=100$ même si la donnée 100 ne figure pas a priori sur la feuille de calcul ; il faut la mémoriser. Les trois équations du système linéaire sont donc mises en jeu avec l’utilisation du tableur.

Cependant l’équation “générale” ($x+ 4x + (4x+10)=100$) n’apparaît pas de manière totalement explicite sur la feuille de calcul mais est tout de même mise en relief dans la formule de la cellule D2 qui calcule la somme des valeurs des trois cellules précédentes, chacune d’elle se référant à la valeur initiale de la cellule A2.

c)Analysons désormais la méthode tableur avec les critères du tableau de la page 7 en vue de le compléter.

Les calculs effectués par le tableur sont de type numérique mais celui -ci met en jeu des “expressions algébriques” dans un sens à la fois très général mais spécifique à la structure des formules d’un tableur.

La résolution du problème à l’aide du tableur se veut doublement indirecte dans le sens où comme pour la démarche algébrique, il y a une phase de modélisation de la situation pour produire les formules des cellules B2, C2 et D2 et comme pour la démarche d’essai/erreur, plusieurs tests sont réalisés (m^me si ceux-ci sont effectués automatiquement).

Concernant la démarche de résolution, la substitution de différentes valeurs à la première inconnue peut s’apparenter aux test d’égalité de l’essai/erreur de même que certaines des données utilisées sont connues et d’autres inconnues.

Nous allons à présent mettre à jour le tableau de la page 7 :

Démarche de résolution	Type de calcul qui intervient	Type de résolution	Nature des objets mis en jeu	Principe ou démarche de résolution	Type de données utilisées
arithmétique A/S	Numérique	Directe	Opérations arithmétiques	Calculs à effectuer	Connues
algébrique	Littéral	Indirecte (on passe par un système d'équations pour modéliser la situation)	Expressions littérales et équations.	Résolution d'un système linéaire d'équations du premier degré à trois inconnues	Connues et inconnues
essai/erreur en papier crayon	Numérique	Indirecte car plusieurs tests préalables.	Opérations arithmétiques lors de tests d'égalité.	Différents essais de valeurs pour réaliser des tests d'égalité.	Connues et inconnues pour lesquelles on substitue plusieurs valeurs de test
Tableur	Numérique	"Doublement" indirecte	"Expressions et calculs algébriques"	Affectation de valeurs aux cellules jusqu'à obtenir la somme souhaitée	Connues et inconnues pour lesquelles le tableur affecte plusieurs valeurs arbitraires

3-**Pour conclure,** la démarche de résolution menée à l'aide d'un tableur emprunte énormément à la méthode d'essai/erreur réalisée avec un papier et un stylo mais l'emploi et les procédures d'une feuille automatisée de calcul se rapprochent de l'aspect générationnel (au sens de Kieran). Le tableur se constitue donc comme un objet hétéroclite dont l'usage fait guise d'intermédiaire entre l'essai/erreur arithmétique et le calcul algébrique/littéral. Dans le cadre d'une utilisation en classe, il peut se révéler économe en temps et favoriser la démarche des élèves qui ne disposent pas encore de tous les aspects du calcul littéral ; en ce qui concerne la résolution par essai/erreur, le tableur peut la rendre plus accessible aux élèves éprouvant des difficultés ou des lenteurs dans les processus calculatoires.