Examen de Didactique de l'Analyse

Partie 1 : analyses a priori

1. Analysons chacun des deux énoncés proposés ; pour cela nous allons en partie nous inspirer des types d'adaptations de connaissances proposées par Aline Robert que nous rappelons brièvement :
   - A1 : les reconnaissances des modalités d'application de connaissances
   - A2 : l'introduction d'intermédiaires
   - A3 : les mélanges de cadres ou notions, les changements de points de vue
   - A4 : l'introduction d'étapes (de calculs, de raisonnement)
   - A5 : l'utilisation des questions précédentes dans un problème
   - A6 : l'existence de choix ou non
   - A7 : le manque de connaissances nouvelles

Commençons à nous intéresser à l'exercice proposé à des élèves de terminale S dans un devoir à faire à la maison. L'énoncé commence par établir certaines notations et est structuré en trois parties chacune subdivisée en sous-questions qui sont souvent dépendantes les unes des autres.

<u>Question 1a)</u> : il s'agir d'établir une autre expression pour la fonction f^. Celle-ci est donnée dans l'énoncé. Il suffit de revenir à la définition de l'intégrale d'une fonction connaissant sa primitive(A1). La mise en forme du résultat attendu comme variation faisant apparaître la primitive suggère ce retour à la définition. Il n'est pas précisé s'il faut justifier l'existence des primitives (celles-ci existent puisque toute fonction dérivable (donc continue) sur un intervalle admet une primitive).

<u>Question 1b)</u> : il s'agit dans un premier temps de calculer f^ lorsque f est défini par $f(t) = t^n$. Rien n'est précisé quant à la forme du résultat attendu. Mais l'idée consiste à se rendre compte que dans ce cas f^ est un polynôme de degré n ce qui servira par la suite où il s'agit de montrer que si f est une fonction polynôme alors f^ est également une fonction polynôme de même degré. Il y a plusieurs étapes (A4) à commencer par le calcul des primitives(A1). On peut ensuite utiliser le résultat précédent(A5) puis on se ramène à du calcul algébrique en manipulant des exposants. Le choix est laissé pour la mise en forme du résultat(A6) et on peut éventuellement introduire(A2) d'autres polynômes dans l'écriture du résultat. Pour la démonstration, il s'agit de ne pas faire directement le lien avec le calcul précédent ("t^n" ne représente pas toutes les fonctions polynômes), d'introduire une fonction polynomiale génératrice $(a_nt^n+a_{n-1}t^{n-1}+...+a_1t+a_0)$(A2) et de se servir du calcul précédent(A5) pour aider au raisonnement. Cette question est riche en adaptations et pourrait dérouter plusieurs élèves.

<u>Question 1c) </u>: une fois les primitives de la fonction (composée de deux fonctions dont une trigonométrique), il s'agit d'utiliser le résultat de la question 1a) (A5) et de mener un calcul dont l'énoncé ne précise pas le résultat. En fait f^ est la fonction nulle. On pourrait envisager que les élèves ne mènent pas le calcul jusqu'au bout, celui-ci comportant

plusieurs étapes(A4) et plusieurs choix sont possibles (A6) quant aux formules trigonométriques à utiliser(A1).

Question 2a) : il s'agit de montrer la dérivabilité de la fonction f^. S'agit-il de revenir à la définition en tant que limite d'un taux de variation ou(A6) d'utiliser les propriétés des fonctions composées (somme et composées de fonction dérivables) en utilisant le résultat de la question 1a)(A5). Le choix est plus ou moins forcé (utilisation de la question précédente) mais il s'agira de considérer F(x+1) comme composée de deux fonctions ; en effet on pourrait imaginer que les élèves dérivent F(x+1) sans tenir compte du "x+1" et écrivent directement F'(x+1)=f(x+1) (au lieu de (F(x+1))'=f(x+1)) ce qui demeure juste mais avec un saut dans le raisonnement.

Question 2b) : Il s'agit de prouver une équivalence entre deux assertions. Cette équivalence peut se faire directement (pas besoin de montrer deux implications séparément). Il y a plusieurs changements de points de vue à effectuer(A3) :
- l'équivalence entre f^ constante et f^'(x)=0 pour tout x
- la notation mathématique adéquate de f^ périodique de période 2.
Ces points de vue sont nécessaire (choix forcé(A6) pour mener à bien la démonstration.
Il y a plusieurs étapes dans le raisonnement(A4) faisant appel à des questions précédentes(2a)(A5)

Question 3a) : Il s'agit d'abord de montrer que si f est croissante alors f^ est croissante également. Un double changement de point de vue(A3) est nécessaire : f croissante donc f(x+1)>f(x-1) et utilisation de la question 2a)(A5) puis(A4) f croissante donc f'(x)>0 pour tout x. Pour montrer ensuite la double inégalité, il s'agit de penser à l'inégalité de la moyenne (A1) en menant des calculs corrects en partant de l'inégalité suivante :
pour tout x, pour tout t compris entre x-1 et x+1 : f(x-1)<=f(t)<=f(x+1) et d'intégrer membre à membre en prenant garde de ne pas confondre le statut de x et de t.

Question 3b) : il s'agit d'utiliser le résultat du 3a)(A5) en montrant la croissance d'une fonction f. Pour cela, il s'agit d'étudier les variations de cette fonction dont le signe de la dérivée est celui d'un trinôme du second degré dont le calcul du discriminant montre la positivité. Il y a donc plusieurs étapes de raisonnement(A4) et reconnaissance du fait qu'il s'agit d'étudier le signe d'un trinôme (A1) et changement de point de vue (A3) en passant du cadre fonctionnel à un calcul algébrique.

Analysons maintenant l'énoncé proposé à des étudiants de première année d'université. La fonction en jeu est la même que celle proposée dans l'énoncé de terminale mais f est uniquement supposée continue.

Question 1 : Il s'agit de montrer que si f est constante alors G l'est aussi. En notant qu'il existe un nombre k(A2) tel que pour tout x, f(x)=k (changement de point de vue(A3), le calcul de G en utilisant la définition de l'énoncé amène à G(x)=k pour tout x.

Question 2 : Il s'agit de montrer que si f est paire (resp. impaire) alors il en est de même pour G. Il faut donc montrer que si f est paire alors G(-x)=G(x) et sue si f est impaire alors G(-X)=-G(x). Un calcul attentif avec changement des bornes de l'intégrale en tenant compte de la parité de f permet de conclure rapidement. Il ya plusieurs étapes dans le raisonnement (et dans les calculs)(A4)

Question 3 : Il s'agit de montrer que G est dérivable et de calculer G'. L'énoncé ne précise pas la forme attendue qui servira dans la question suivante. Un raisonnement analogue à celui de la question 2a) de l'énoncé de terminale permet de conclure bien qu'ici on ne fasse pas appel à d'éventuelles questions antérieures. Il y a donc plusieurs étapes de raisonnement(A4) et choix dans la manière de présenter le résultat final(A6).

Question 4 : il s'agit d'expliciter la fonction G lorsque f est la fonction valeur absolue. Pour cela il est nécessaire de disposer d'une primitive de la fonction valeur absolue et de distinguer plusieurs cas de figures : x>1 ; x<1 ; x compris entre 0 et 1 et x compris entre -1 et 0. Il reste à être attentif aux signes. Plusieurs adaptations sont présentes en particulier A2, A4.

Question 5 : il s'agit de calculer la limite de G en l'infini connaissant celle de f. Au niveau première année d'université, le recours à la définition de limite par les epsilon semble la seule solution envisageable. Il y a donc un changement de point de vue à opérer (A3) et plusieurs étapes(A4) pour aboutir à une double inégalité comme l-epsilon<f(t)<l+epsilon pour t suffisamment grand et d'utiliser successivement l'inégalité de la moyenne puis le théorème d'encadrement des limites pour conclure.

2. Comparons les deux énoncés afin d'illustrer en partie la rupture existante entre le lycée et la première année d'université. En premier lieu, nous pouvons constater que dans l'exercice pour l'université, chaque question est indépendante alors que dans l'autre la plupart des questions font appel à des résultats précédemment établis. Dans l'énoncé de lycée, la plupart des résultats à montrer sont explicités dans l'énoncé, ce qui peut favoriser certaines pistes de recherche. De même, certaines questions commencent par "déduisez-en" ce qui incite largement à utiliser les questions précédentes. Plus d'autonomie dans la recherche semble ainsi donnée aux étudiants de l'université.

Certaines questions de l'énoncé de lycée sont purement techniques et calculatoires et relèvent plus de compétences algébriques que de connaissances en analyses (question 2b, 2c) et la question 3b en partie), on peut y déceler une forme d'"algébrisation" de l'analyse. Les changements de points de vue sont nettement plus nombreux dans l'énoncé de l'université, de même que le nombre d'étapes dans les raisonnements, l'introduction et l'utilisation d'autres propriétés (inégalité de la moyenne, théorème d'encadrement des limites...), les choix pour commencer à raisonner qui peuvent être nombreux et parmi lesquels seuls quelques-uns (voire un seul) permettent d'aboutir.

Notons également l'absence totale d'un point de vue local dans l'énoncé de terminale ; celui-ci est présent dans la dernière question de l'énoncé d'université où il faut revenir au concept-définition de limite avec l'utilisation de quantificateurs pour répondre. On adopte également partiellement le point de vue local lors de l'étude de la valeur absolue de la question 4. L'énoncé de terminale se situe surtout dans le monde "proceptuel" basé sur des actions encapsulées en procepts et un symbolisme qui permet de jouer entre les aspects processus et objets, c'est par exemple le cas des questions 1a)b) et c). D'autres questions se situent plus dans le "monde formel" où les objets sont assujettis à des définitions et des propriétés déduites via des preuves formelles comme la question 2b) où l'on formalise les termes “fonction constante” ou “fonction périodique de période 2”. Mais ces questions prennent plus d'importance dans l'énoncé d'université en particulier la question 5 où l'on revient à la définition formelle de la notion de limite.

L'énoncé de lycée se situe plus à un “niveau intra” où l'élève considère les fonctions comme des objets isolés et se concentre davantage sur les processus dans lesquels ils sont engagés alors que l'énoncé d'université se place naturellement plus au “niveau inter” où les étudiants commencent à établir des connexions entre différents objets fonctionnels. Dans l'énoncé de lycée, l'énoncé se rapproche parfois de ce “niveau inter” mais il faut tout de même mentionner que cet énoncé n'est pas des plus classiques pour un exercice de lycée ; il s'éloigne par plusieurs aspects d'un problème comme on peut le rencontrer au baccalauréat et on pourrait supposer qu'il a été donné dans un bon lycée préparant ses élèves à rentrer en classes préparatoires aux grandes écoles. La rupture qui existe entre le lycée et la première année d'université aurait été sûrement plus flagrante en considérant un énoncé d'exercice plus classique.

Partie 2 : analyses de productions d'élèves de terminale sur le premier énoncé

1.Mettons en parallèle notre précédente analyse a priori de l'énoncé de terminale avec les productions de cinq élèves.

Question 1a) : chacun des élèves est parvenu sans difficulté à établir le résultat désiré. Trois d'entre eux(Luce, Victor et Manuel) ont justifié l'existence d'une primitive.

Question 1b) : concernant le calcul de f^ avec $f(t)= t^n$, seuls Luce et Manuel effectuent un calcul permettant de conclure que f^ est de degré n. Louise et Victor ne mènent pas les calculs “jusqu'au bout” et Clothilde fait des erreurs de calculs algébriques (elle “distribue” les exposants”. Quant à la généralisation à toutes les fonctions polynômiales, aucun des élèves n'y parvient. La question reste souvent non traitée. Seul Louise, Clothilde et Manuel commencent une preuve mais ne formalisent pas correctement une fonction polynomiale dans toute sa généralité : pour Louise $f(t)=t^n$, pour Clothilde $f(t)= at^{n+1}+bt^n+c$ pour Manuel, $f(t)=a^n+b^{n-1}+...+k$.

Question 1c) : tous les élèves parviennent à déterminer une primitive de la fonction. Mais seuls Victor et Manuel parviennent à établir que f^(x)=0. On peut noter la diversité des formules trigonométriques utilisées.

Question 2a) : à la lecture des productions d'élèves, on a l'impression qu'ils sont tous passé de (F(x+1))' à F'(x+1) sans remarquer qu'il s'agissait d'une fonction composée. Heureusement ici cela ne change pas le résultat. Luce et Clothilde ne démontrent pas la dérivabilité de f^ correctement et calculent directement sa dérivée.

Question 2b) : Luce, Victor et Manuel mènent correctement leur démonstration bien qu'ils oublient les quantificateurs ; les équivalences de Victor ne sont pas toujours claires et celui-ci suppose que f est linéaire dans la dernière étape. Les autres n'ont pas traité la question

Question 3a) : En ce qui concerne la croissance de f^, tous les élèves ont traité la question mais les équivalences de Luce se révèlent fausses, elle se perd et confond les rôles joués par x et t. En revanche aucun d'entre eux ne traite la double inégalité si ce n'est Manuel qui pense à utiliser l'inégalité de la moyenne mais l'utilise à mauvais escient en se trompant dans les calculs.

Question 3b) : Hormis Victor, tous ont réussi à prouver correctement la croissance de f mais Louise et Clothilde ne se sont pas rendus compte qu'il suffisait d'appliquer la question précédente pour conclure sur la croissance de f^.

On se rend compte que dès qu'il s'agit d'analyse "algébrisée", les élèves répondent systématiquement, on reconnaît leur habitude à traiter certains calculs ou raisonnements comme ceux des questions 1c) ou 3b). En revanche, l'utilisation de certaines propriétés n'est pas toujours correcte de même que les raisonnements plus complexes (comprenant plusieurs étapes) posent encore plusieurs difficultés. On se rend compte que les questions nécessitant plusieurs adaptations (voir les analyses de la partie 1) sont en général les moins réussies. Notre étude a priori semble être en adéquation avec les productions des élèves.

2. Parmi les cinq copies d'élèves, c'est celle de Manuel qui semble la meilleure ; ce dernier a traité toutes les questions bien qu'il ait commis plusieurs erreurs notamment dans la formulation des fonctions polynômiales et l'utilisation non maîtrisée de l'inégalité de la moyenne. Il n'utilise pas non plus systématiquement les quantificateurs dans la rédaction de ses preuves. On pourrait imaginer qu'il serait susceptible de réussir à l'université.

Les copies de Luce et Victor peuvent être rapprochées (je suppose que la dernière question pour Victor a été tronquée lors de la photocopie). Ils parviennent à réaliser certaines démonstrations nécessitant plusieurs étapes de raisonnement (question 2b) ; ils s'interrogent sur l'existence de la primitive dans la première question et leurs calculs sont généralement corrects. Ils seraient susceptibles de réussir à l'université en tout cas mieux que leurs deux autres camarades (à la vue de ce seul devoir en tout cas).

Louise et Clothilde n'ont pas traité plusieurs questions en général celles demandant un raisonnement non algébrique ; leurs calculs sont parfois faux ou incomplets. De plus elles ne font pas nécessairement le lien avec les questions précédentes (voir question 3b) et ont des difficultés à traduire formellement certaines notions mathématiques ne serait)ce que pour amorcer une preuve. On peut imaginer qu'elles auront plus de mal que leurs camarades pour réussir à l'université.

Encore une fois, il est difficile d'établir des conclusions convaincantes à la lecture d'une seule copie. Il faudrait pouvoir analyser plusieurs copies et être informé des progrès réalisés par ces élèves au cours de l'année.