

Leçon 12 Propriétés des probabilités

I Langage des probabilités

- a) Lancer un dé, jouer à pile ou face, tirer une carte dans un jeu de cartes, jeter une punaise sur le sol, prendre un objet à l'aveugle dans un sac sont des **expériences aléatoires**. Ce sont des expériences qui conduisent à des résultats que l'on connaît mais on ne sait pas lequel de ces résultats va se réaliser.
- b) A partir d'une expérience aléatoire, on définit ce que l'on appelle des **événements** qui sont des ensembles de résultats de l'expérience.

Exemples : Considérons l'expérience aléatoire suivante : "lancer de dé non truqué à 6 faces".

Il y a six issues possibles.

- L'événement D_1 "tirer un 4" est un événement à une issue (**événement élémentaire**).
 - L'événement D_2 "tirer un nombre pair" possède 3 issues.
 - L'événement D_3 "tirer un nombre positif" possède 6 issues. (**événement certain**).
 - L'événement D_4 "tirer un 7" n'a pas d'issue. (**événement impossible**).
- c) Des événements **incompatibles** sont des événements qui ne peuvent pas se produire simultanément. Par exemple, les événements "tirer un nombre pair" et "tirer un 3" sont incompatibles.
- d) L'événement **contraire** d'un événement A est celui qui se réalise lorsque A ne se réalise pas. On le note \overline{A} ou A^c ou \bar{A} .
Exemple : si A est l'événement "tirer un nombre pair" alors \bar{A} est "tirer un nombre impair".

II Probabilité d'un événement

- a) Lorsque l'on répète un très grand nombre de fois une même expérience aléatoire, la fréquence de réalisation d'un événement A se stabilise autour d'un nombre.
Ce nombre est appelé la **probabilité** de l'événement A . On la note $p(A)$ et $0 \leq p(A) \leq 1$.

Exemple : On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer une punaise au sol. On note H l'événement "la pointe est vers le haut". Pour déterminer la probabilité de H , on réalise un très grand nombre de fois l'expérience et on détermine la fréquence de H en calculant :

$$\frac{\text{nombre de fois où la pointe est vers le haut}}{\text{nombre total de lancers}}$$

La probabilité de H est approximativement égale à ce nombre.

- b) Lorsque chaque événement élémentaire a la même probabilité, on dit qu'il y a **équiprobabilité** ou encore que les événements élémentaires sont équiprobables.

Pour signifier qu'il y a équiprobabilité, on utilise des expressions telles que :

- "on tire au hasard une carte"
- "on lance une pièce équilibrée"
- "on jette un dé underlinenon truqué ou non pipé"
- "les jetons ou les boules sont indiscernables au toucher"

c) **Théorème** : Si l'on est dans une situation d'équiprobabilité, alors la probabilité d'un événement A est :

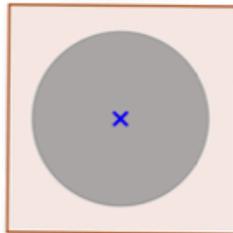
$$p(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables de } A}{\text{nombre total d'issues de l'expérience}}$$

d) **Exemples** : Calculons la probabilité des quatre événements de la page précédente :

- $p(D_1) = \frac{1}{6}$
- $p(D_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- $p(D_3) = \frac{6}{6} = 1$
- $p(D_4) = \frac{0}{6} = 0$

e) Exemple de calcul de probabilité dans un cadre géométrique :

Un joueur de fléchette lance au hasard une fléchette sur cette cible carrée. Il ne rate jamais sa cible. Quelle est la probabilité $p(D)$ que la fléchette atteigne le disque ?



$$p(D) = \frac{\text{Aire du disque}}{\text{Aire du carré}}$$

Remarque : les statistiques permettent d'évaluer la fréquence de phénomènes constatées lors d'expériences passées. Les probabilités permettent de prévoir la fréquence probable de phénomènes lors d'expériences dont on ne connaît pas le résultats.

III Propriétés des probabilités

- a) La probabilité d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1
(la probabilité d'un événement impossible est égale à 0
la probabilité d'un événement certain est égale à 1)
- b) La somme des probabilités de tous les résultats d'une expérience aléatoire est égale à 1
- c) Si A et B sont deux événements incompatibles alors $p(A \text{ ou } B) = p(A) + p(B)$
- d) $p(A) + p(\text{non } A) = 1$ donc $p(\text{non } A) = 1 - p(A)$

Exemples (j'expliquerai ces propriétés quand nous nous reverrons)