Compétence(s) accessible(s) :

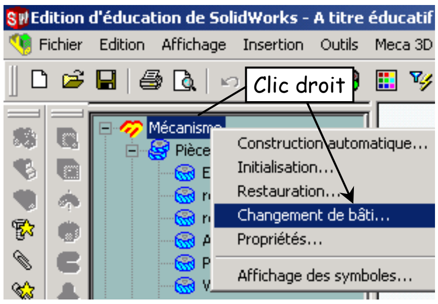
- Associer à chaque liaison les paramètres géométriques et les grandeurs de vitesse qui définissent les mouvements permis,
- Déterminer les grandeurs cinématiques caractéristiques associées à la fonction réalisée (vitesse linéaire et/ou angulaire d'entrée et de sortie).

Commentaires : les problématiques proposées doivent conduire l'élève à :

- observer, manipuler et décrire la constitution physique des assemblages et guidages concernés,
- établir un modèle associé (dans les cas simples) et décrire les paramètres influents,
- mesurer les valeurs des paramètres cinématiques d'entrée, de sortie, intermédiaires.

1. Cinématique des mécanismes : généralités

La cinématique est la partie de la mécanique qui étudie les mouvements des solides indépendamment des causes qui les provoquent. Les grandeurs physiques qui interviennent sont le temps [s], la longueur [m] et l'angle [rad] [°].

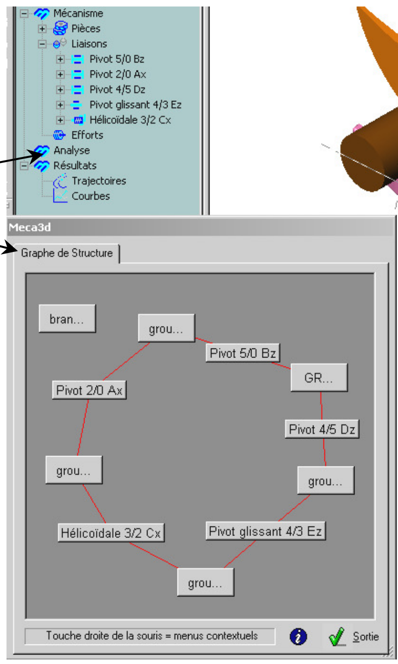


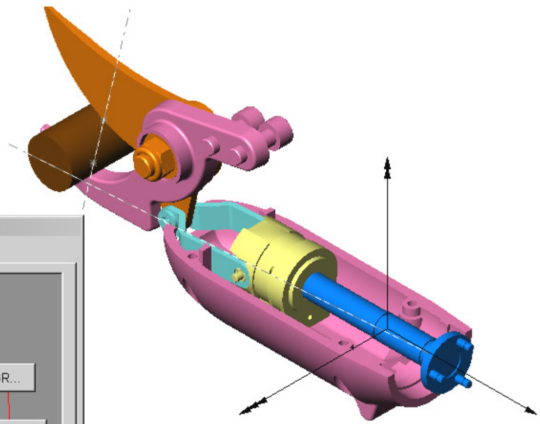
On devra définir un solide de référence, généralement la pièce fixe du mécanisme (« ***bâti*** » dans Méca3D), et y attacher un repère $R_0\left(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$. Dans Méca3D, un clic droit sur *Mécanisme* donne la possibilité d'effectuer un « *changement de bâti* ».

2. Graphe des liaisons (ou graphe de structure)

Le graphe des liaisons permet d'avoir une vue d'ensemble des liaisons mécaniques existant entre les différentes ***classes d'équivalence cinématique*** (« ***pièces*** » dans MECA3D).

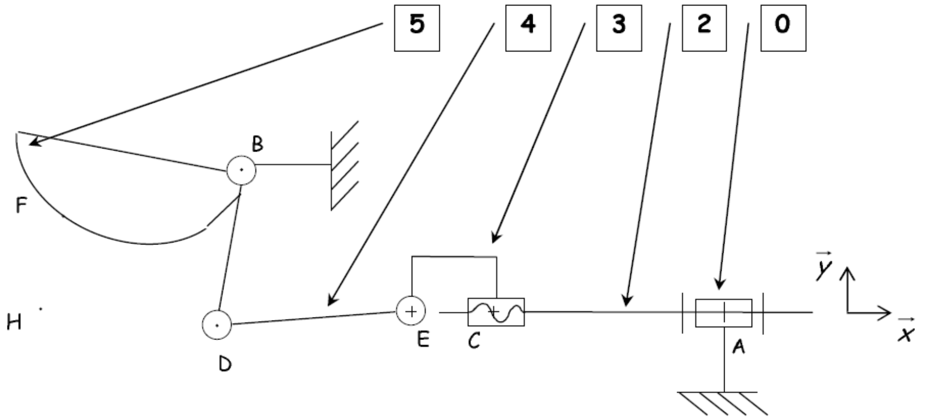
Graphe de structure sur MECA3D





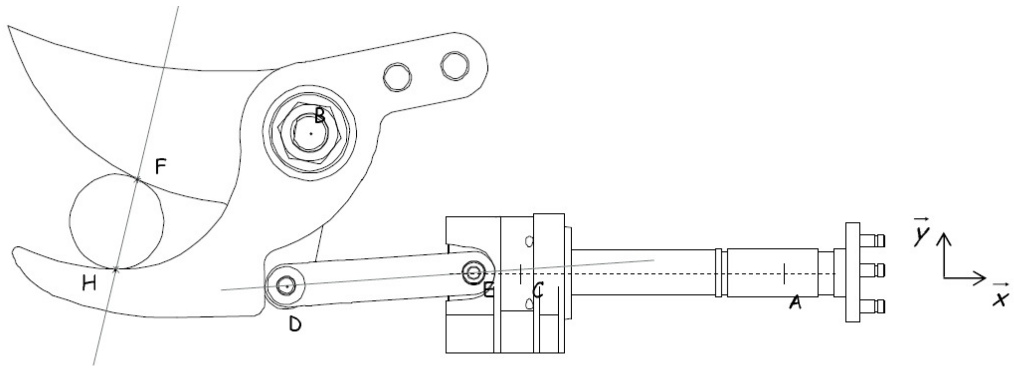
3. Schéma cinématique et paramétrage d'un mécanisme

Sur le schéma cinématique, il est nécessaire de placer le repère de référence cité ci-dessus, afin de caractériser complètement les différentes grandeurs géométriques (paramètres dimensionnels et paramètres de position) et cinématiques.



4. Loi « entrée–sortie » d'un mécanisme

Exemple : sécateur Pellenc :

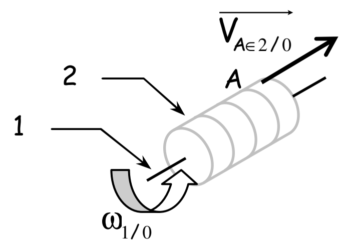


Loi « entrée-sortie » : $\frac{\theta_s}{\theta_e} =$ f(pas système vis/écrou, BD, DE, EB) ou θ_s = f(θ_e , pas système vis/écrou, BD, DE, EB)

5. Nature et caractéristiques d'un mouvement

5.1. Mouvement spatial

Le seul mouvement spatial étudié en pré-bac est le **mouvement hélicoïdal**, c'est-à-dire celui de l'écrou par rapport à la vis dans un système vis-écrou (liaison hélicoïdale).
Le mouvement hélicoïdal de 2 par rapport à 1 permet de transformer le mouvement de rotation de 1 par rapport à 0 en un mouvement de translation de 2 par rapport à 0.



Relations géométriques et cinématiques : lois entrée-sortie

Rotation de la vis de 1 tour → Déplacement de l'écrou du pas p [m]

Rotation de la vis de 2π [rad] → Déplacement de l'écrou du pas p [m]
Rotation de la vis de $\theta_{1/0}$ [rad] → Déplacement de l'écrou de x [m]

Produit en croix

D'où la relation entre les déplacements linéaire et angulaire : $\boxed{x_{A\in 2/0} = \theta_{1/0}.\frac{p}{2\pi}}$

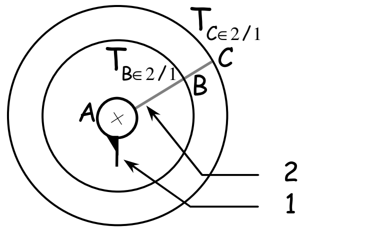
Puis celle entre les vitesses linéaire et angulaire : $\boxed{V_{A\in 2/0} = \omega_{1/0}.\frac{p}{2\pi}}$ $V_{A\in 2/0}$ [m.s^{-1}] ; $\omega_{1/0}$ [rad.s^{-1}]

Et enfin celle entre les accélérations linéaire et angulaire : $\boxed{a_{A\in 2/0} = \ddot{\theta}_{1/0}.\frac{p}{2\pi}}$ $a_{A\in 2/0}$ [m.s^{-2}] ; $\ddot{\theta}_{1/0}$ [rad.s^{-2}]

5.2. Mouvement plan

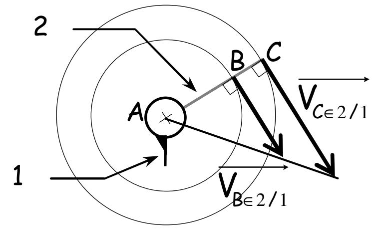
Mouvement de rotation de 2/1

Trajectoire



$T_{B\in 2/1}$ et $T_{C\in 2/1}$ sont des cercles concentriques de centre A et de rayons différents.

Vitesse



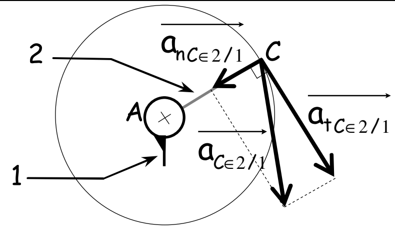
Hypothèse : 2 tourne par rapport à 1 à la vitesse angulaire $\omega_{2/1}$.

Vitesse de B appartenant à 2/1 :

$$\boxed{V_{B\in 2/1} = AB.\omega_{2/1}}$$

V [m.s^{-1}] ; ω [rad.s^{-1}] ; AB [m].

Accélération



Accélération tangentielle :

$$\boxed{a_{tC\in 2/1} = AC.\ddot{\theta}_{2/1}}$$

Accélération normale :

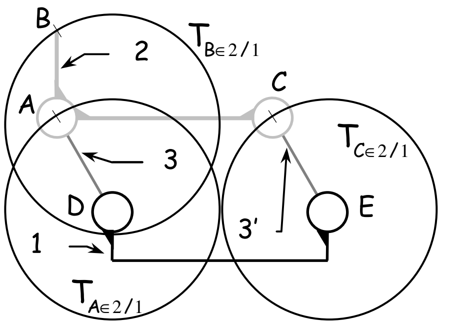
$$\boxed{a_{nC\in 2/1} = \frac{V_{C\in 2/1}^{\ 2}}{AC} = AC.\omega_{2/1}^{\ 2}}$$

a [m.s^{-2}] ; $\ddot{\theta}$ [rad.s^{-2}]

Mouvement de translation...

...circulaire de 2/1

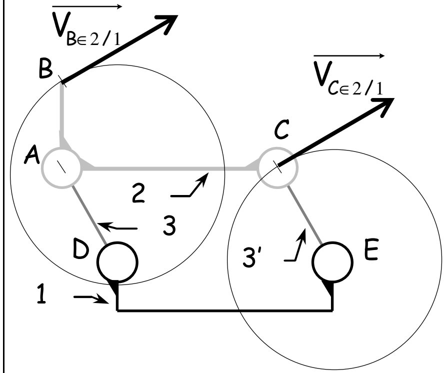
Trajectoire



Hypothèse : ACED est un parallélogramme.

$T_{A\in 2/1}$, $T_{B\in 2/1}$ et $T_{C\in 2/1}$ sont des cercles de même rayon mais de centres différents ; La pièce 2 reste parallèle à elle-même.

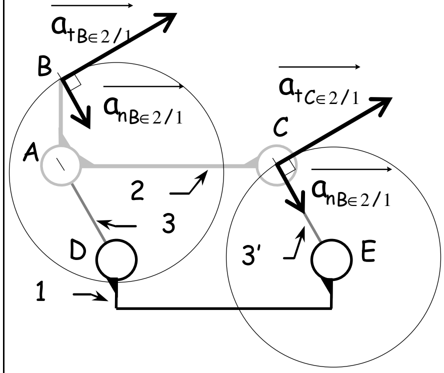
Vitesse



$$\overrightarrow{V_{A\in 2/1}} = \overrightarrow{V_{B\in 2/1}} = \overrightarrow{V_{C\in 2/1}}$$

Dans les deux cas ci-dessus : les vecteurs vitesse sont tangents à la trajectoire, donc perpendiculaires à ses rayons.

Accélération



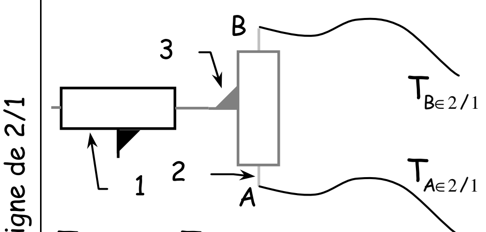
$$\overrightarrow{a_{A\in 2/1}} = \overrightarrow{a_{B\in 2/1}} = \overrightarrow{a_{C\in 2/1}}$$

Dans les deux cas ci-dessus :

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_n}}$$

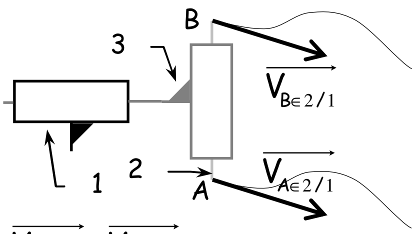
...curviligne de 2/1

Trajectoire



$T_{A\in 2/1}$ et $T_{B\in 2/1}$ sont deux courbes superposables ; La pièce 2 reste parallèle à elle-même.

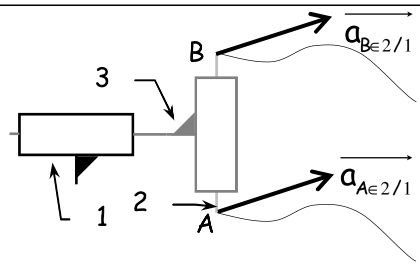
Vitesse



$\overrightarrow{V_{A\in 2/1}} = \overrightarrow{V_{B\in 2/1}}$: vecteurs tangents à la trajectoire aux points considérés, déterminés en fonction des Mvts de 3 et 2

(cf 6. Loi de composition des vitesses).

Accélération

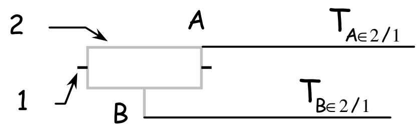


$\overrightarrow{a_{A\in 2/1}} = \overrightarrow{a_{B\in 2/1}}$

Vecteurs déterminés en fonction des Mvts de 3 et 2.

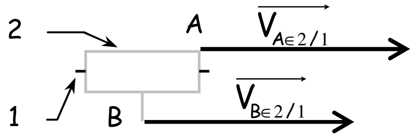
...rectiligne de 2/1

Trajectoire



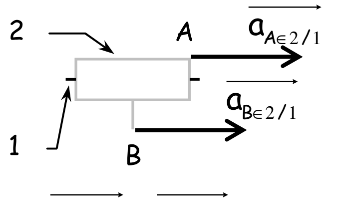
$T_{A\in 2/1}$ et $T_{B\in 2/1}$ sont deux segments de droites parallèles ; 2 reste parallèle à elle-même.

Vitesse



$\overrightarrow{V_{A\in 2/1}} = \overrightarrow{V_{B\in 2/1}}$: vecteurs tangents à la trajectoire, donc ici portés par la trajectoire.

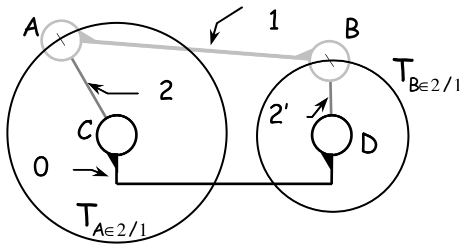
Accélération



$\overrightarrow{a_{A\in 2/1}} = \overrightarrow{a_{B\in 2/1}}$: vecteurs colinéaires aux vecteurs vitesse.

conclusion

Trajectoire	Vitesse	Accélération
Les trajectoires d'au moins trois points du solide sont superposables ; Le solide reste parallèle à lui-même.	Le champ (ensemble) des vecteurs vitesse est uniforme.	Le champ des vecteurs accélération est uniforme.

<table>
<tr><th>Nature</th><th>Trajectoire</th><th>Vitesse</th><th>Accélération</th></tr>
<tr><td>Mouvement plan général de 1/0</td><td>

<u>Hypothèse</u> : ABDC n'est pas un parallélogramme.

Dans cet exemple, les trajectoires de A et B sont des cercles de centres et rayons différents.

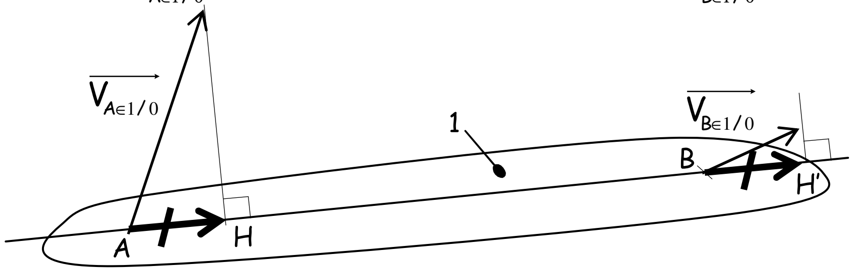
Dans un mouvement plan général, les trajectoires de trois points ne sont :
- ni superposables ⇒ ce n'est pas une translation,
- ni des cercles concentriques ⇒ ce n'est pas une rotation,
et elles peuvent être de formes quelconques.</td><td colspan="2">Pour l'étude des vitesses et accélérations des points A et B, voir le mouvement de rotation ou de translation en page 2, ainsi que les propriétés du mouvement plan ci-après.</td></tr>
</table>

5.3. <u>Propriétés du mouvement plan général</u>

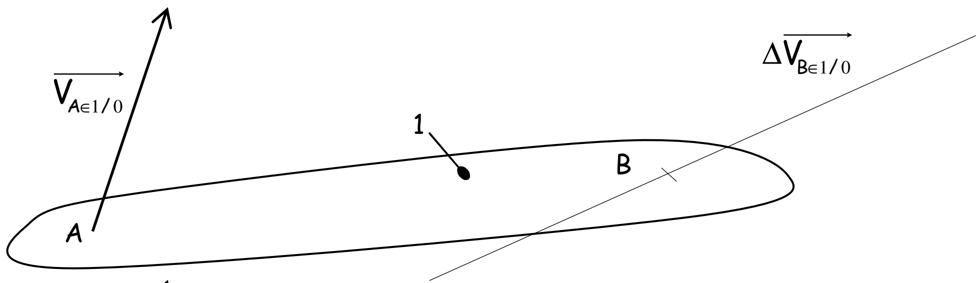
5.3.1. <u>Equiprojectivité</u>

Equiprojectivité signifie « égale projection ».
En effet, à chaque instant, pour deux points A et B appartenant au solide <u>1</u> en mouvement plan général par rapport à <u>0</u>, les **projections orientées** $\overrightarrow{AH}$ du vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{A\in 1/0}}$ sur (AB) et $\overrightarrow{AH'}$ du vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{B\in 1/0}}$ sur (AB) sont égales.

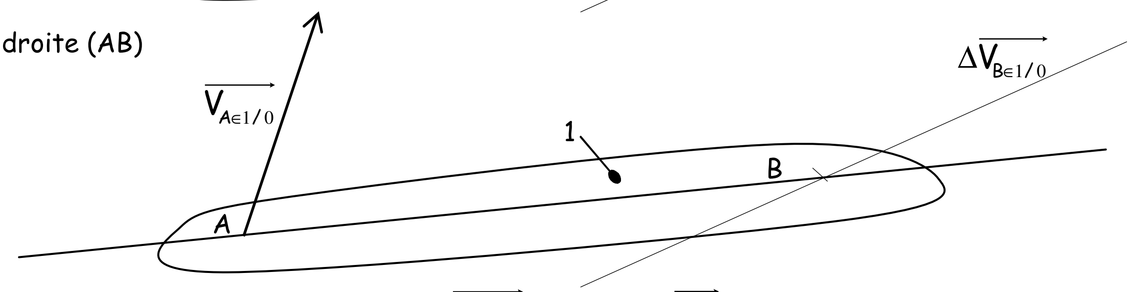
$$\boxed{\overrightarrow{V_{A\in 1/0}}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V_{B\in 1/0}}.\overrightarrow{AB}}$$



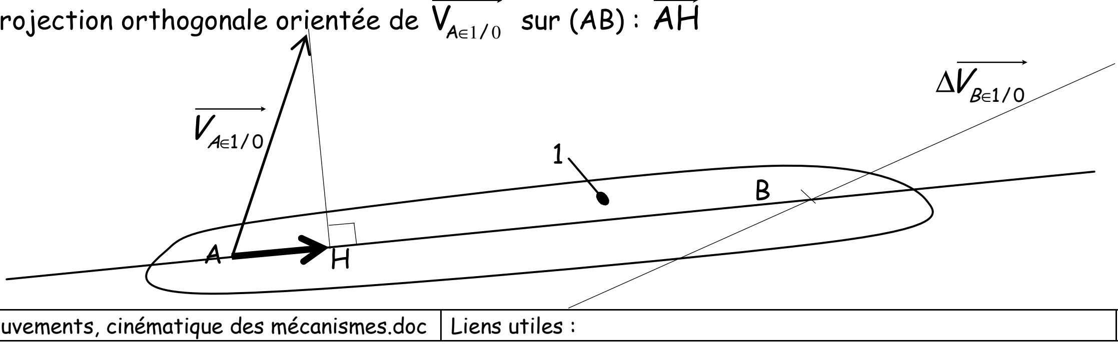
Méthode graphique permettant de déterminer complètement $\overrightarrow{V_{B\in 1/0}}$ connaissant sa direction $\Delta\overrightarrow{V_{B\in 1/0}}$ et connaissant complètement $\overrightarrow{V_{A\in 1/0}}$



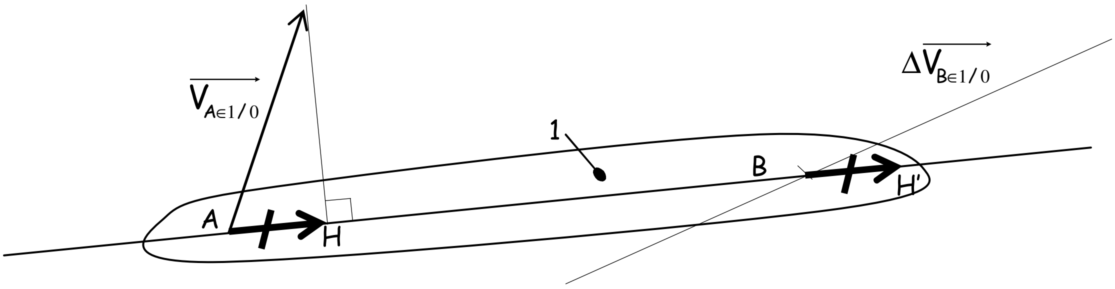
<u>Etape 1</u> : Tracer la droite (AB)



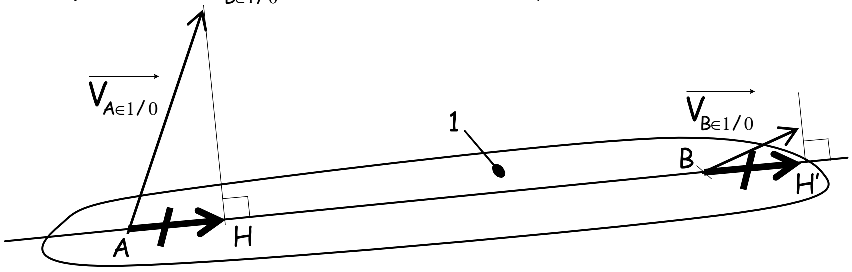
<u>Etape 2</u> : Tracer la projection orthogonale orientée de $\overrightarrow{V_{A\in 1/0}}$ sur (AB) : $\overrightarrow{AH}$



Etape 3 : Faire « glisser » $\overrightarrow{AH}$ sur (AB) pour que sa nouvelle origine soit le point B : on obtient $\overrightarrow{BH'}$



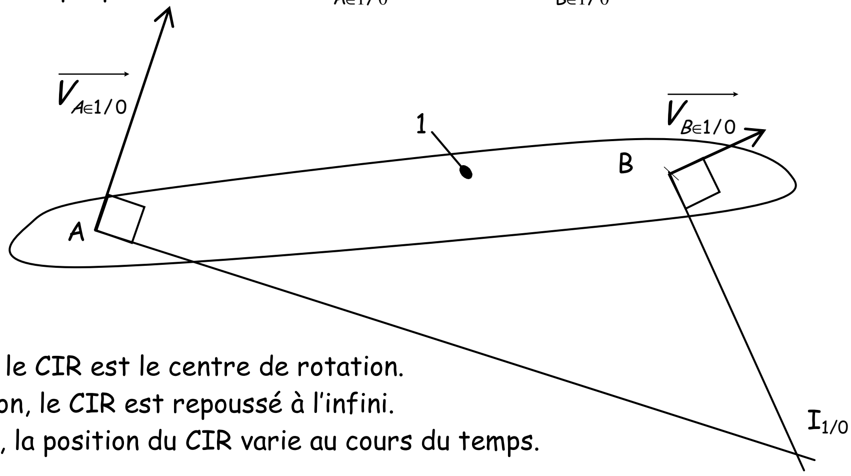
Etape 4 : Tracer la perpendiculaire à (AB) passant par H'. Le point d'intersection de cette perpendiculaire avec $\Delta\overrightarrow{V_{B\in1/0}}$ nous permet de définir complètement $\overrightarrow{V_{B\in1/0}}$, aussi bien en sens qu'en intensité.



5.3.2. Centre Instantané de Rotation (C.I.R.)

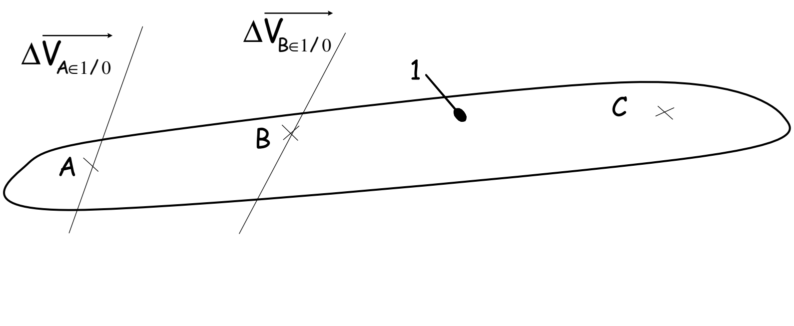
A chaque instant, pour un solide 1 en mouvement plan général par rapport à un solide 0, il existe un point unique $I_{1/0}$ appelé Centre Instantané de Rotation dont la vitesse est **nulle** : $\overrightarrow{V_{I\in1/0}} = \vec{0}$; Cela revient à dire que le solide est en rotation autour de ce point changeant de position à chaque instant. Un mouvement plan est donc une succession de mouvements de rotation de centres différents.

Le CIR est situé à l'intersection des perpendiculaires à $\Delta\overrightarrow{V_{A\in1/0}}$ en A et à $\Delta\overrightarrow{V_{B\in1/0}}$ en B.



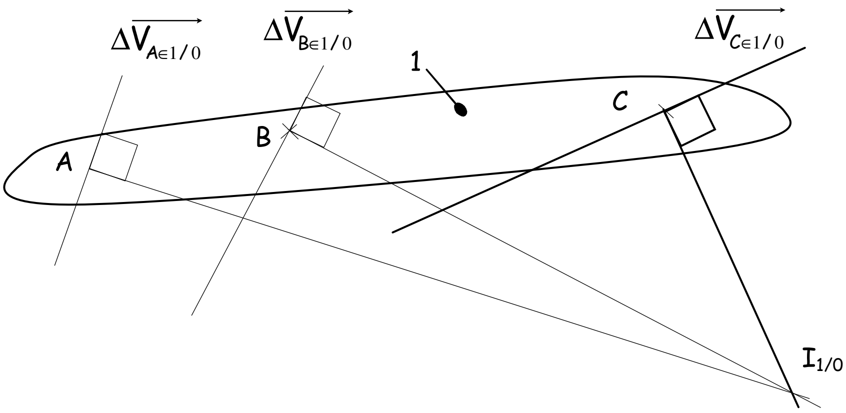
Remarques :
Pour un mouvement de rotation, le CIR est le centre de rotation.
Pour un mouvement de translation, le CIR est repoussé à l'infini.
Pour un mouvement plan général, la position du CIR varie au cours du temps.

Méthode graphique permettant de déterminer $\Delta\overrightarrow{V_{C\in1/0}}$ connaissant $\Delta\overrightarrow{V_{A\in1/0}}$ et $\Delta\overrightarrow{V_{B\in1/0}}$



Tracer les perpendiculaires à $\Delta\overrightarrow{V_{A\in 1/0}}$ en A et à $\Delta\overrightarrow{V_{B\in 1/0}}$ en B : l'intersection donne $I_{1/0}$.

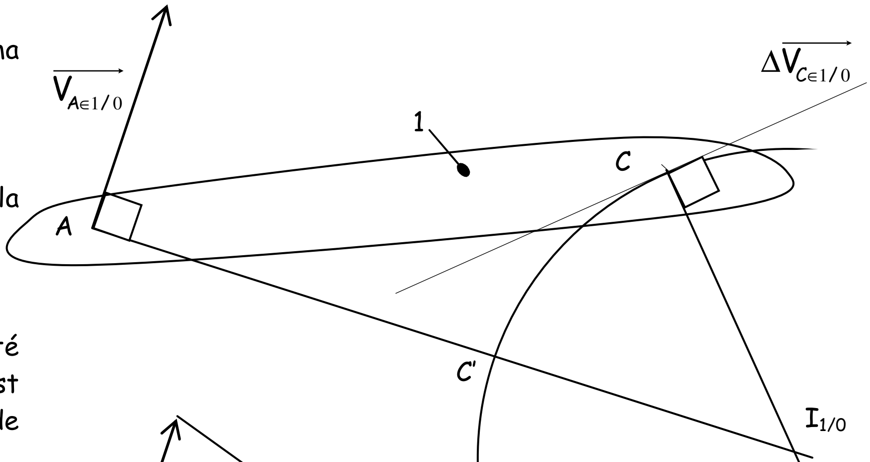
Puisqu'à chaque instant <u>1</u> est en rotation par rapport à <u>0</u>, autour de $I_{1/0}$, $\Delta\overrightarrow{V_{C\in 1/0}}$ est la perpendiculaire à ($CI_{1/0}$) en C.



Méthode de « proportionnalité des vitesses » ou du « triangle des vitesses », permettant de déterminer complètement $\overrightarrow{V_{C\in 1/0}}$ connaissant $\Delta\overrightarrow{V_{C\in 1/0}}$, $I_{1/0}$, et $\overrightarrow{V_{A\in 1/0}}$

<u>Etape 1</u> : Tracer C' comme le montre le schéma ci-contre :

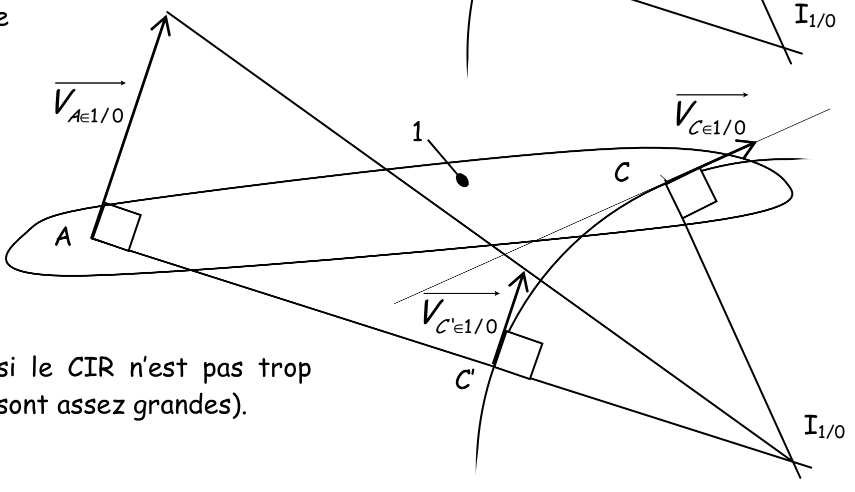
C' a la même vitesse que C puisqu'il est placé à la même distance de $I_{1/0}$



<u>Etape 2</u> : Tracer la droite de proportionnalité des vitesses, le champ des vecteurs vitesse est en effet triangulaire dans un mouvement de rotation.

On en déduit $\overrightarrow{V_{C'\in 1/0}}$,

Puis $\overrightarrow{V_{C\in 1/0}}$ telle que $\left\|\overrightarrow{V_{C\in 1/0}}\right\| = \left\|\overrightarrow{V_{C'\in 1/0}}\right\|$



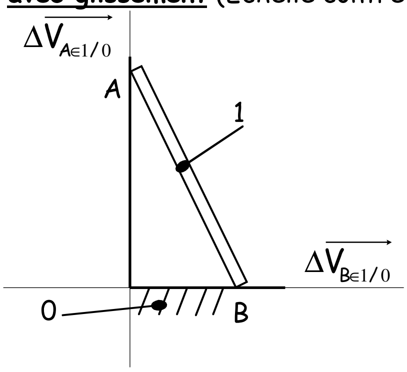
5.3.3. <u>Choix de la méthode</u>

Suivant les cas, on choisira cette méthode (si le CIR n'est pas trop éloigné) ou l'équiprojectivité (si les projections sont assez grandes).

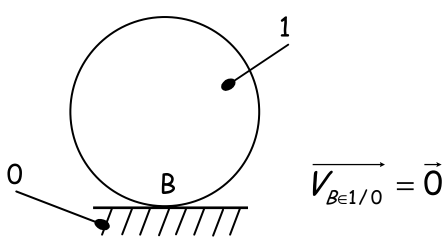
5.4. <u>glissement et roulement sans glissement</u>

Le vecteur vitesse de glissement, s'il existe, est porté par la tangente au contact entre deux pièces (c'est-à-dire par la perpendiculaire à la normale de contact).

* Exemple 1 : <u>**avec glissement**</u> (Echelle contre un mur)



* Exemple 2 : Mouvement de **roulement** <u>**sans glissement**</u> (*Système pignon-crémaillère*)



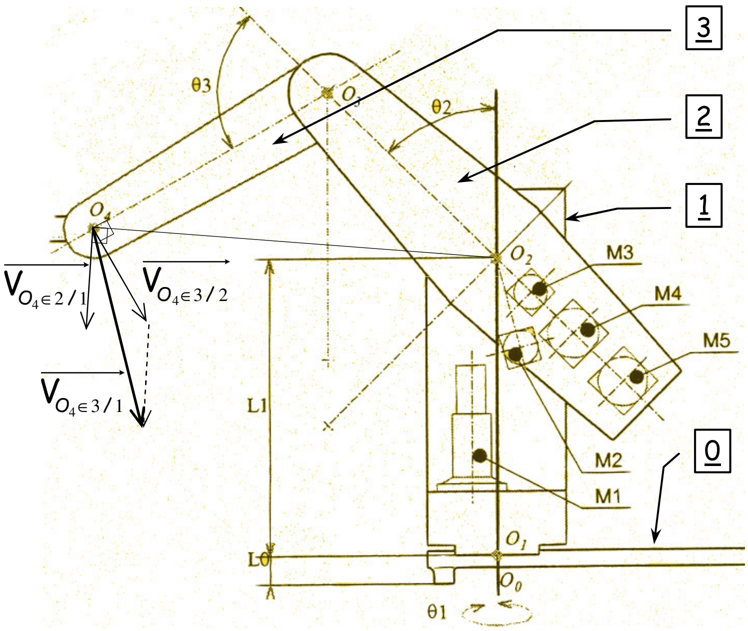
<u>Remarque</u> : $A\in 1$ et $A\in 0$ sont deux points coïncidents, ainsi que $B\in 1$ et $B\in 0$.

6. Loi de composition des vitesses

1er exemple : le bras de robot Ericc :

0 : socle 2 : bras
1 : buste 3 : avant-bras

Hypothèse : Les points O_2, O_3 et O_4 sont coplanaires et les articulations sont des liaisons pivots d'axes perpendiculaires au plan formé par ces trois points. Le buste est fixe par rapport au socle.



Le bras décrit θ_2 à la vitesse angulaire $\omega_{2/1}$ et l'avant-bras décrit θ_3 à la vitesse angulaire $\omega_{3/2}$.
On recherche la vitesse absolue $\overrightarrow{V_{O_4\in 3/1}}$.
La loi de composition des vitesses angulaires est :

$$\boxed{\omega_{3/1} = \omega_{3/2} + \omega_{2/1}}$$

La loi de composition des vitesses est :

$$\boxed{\overrightarrow{V_{O_4\in 3/1}} = \overrightarrow{V_{O_4\in 3/2}} + \overrightarrow{V_{O_4\in 2/1}}}$$

Vitesse absolue de O_4 pour les deux mouvements simultanés

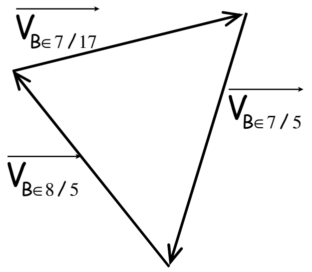
Vitesse relative de O_4 :
$$\left\|\overrightarrow{V_{O_4\in 3/2}}\right\| = O_3O_4.\omega_{3/2}$$

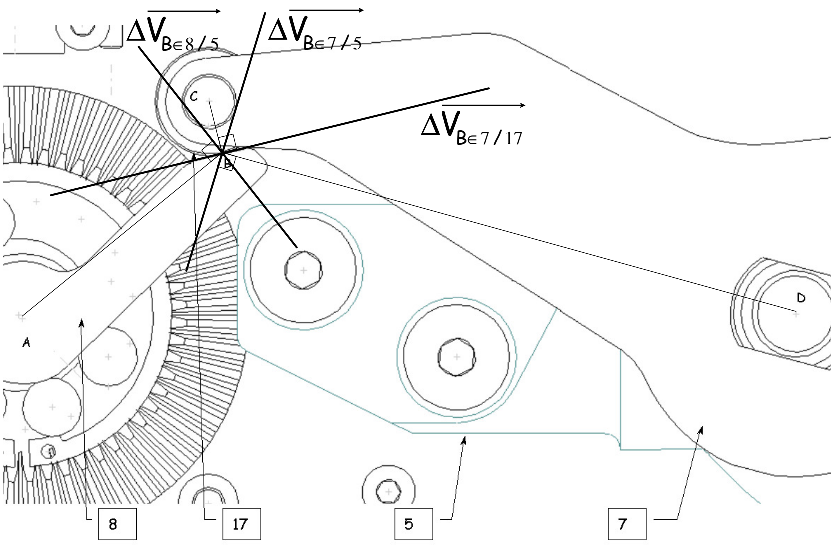
Vitesse d'entraînement de O_4 :
$$\left\|\overrightarrow{V_{O_4\in 2/1}}\right\| = O_2O_4.\omega_{2/1}$$

2ème exemple : système à came 8 et galet 17

$$\boxed{\overrightarrow{V_{B\in 7/5}} = \overrightarrow{V_{B\in 7/17}} + \overrightarrow{V_{B\in 17/8}} + \overrightarrow{V_{B\in 8/5}}}$$

Avec $\overrightarrow{V_{B\in 17/8}} = \vec{0}$ car $Mvt_{17/8}$ = roulement sans glissement.



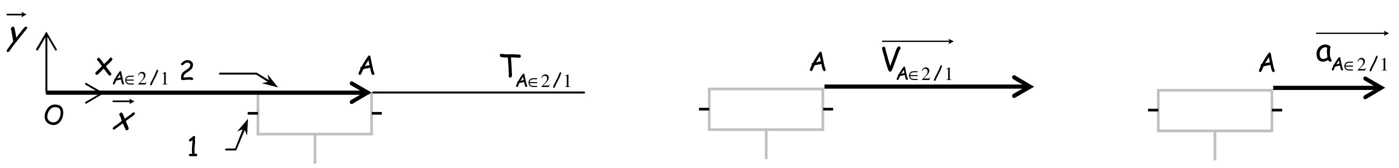


7. Lois horaires

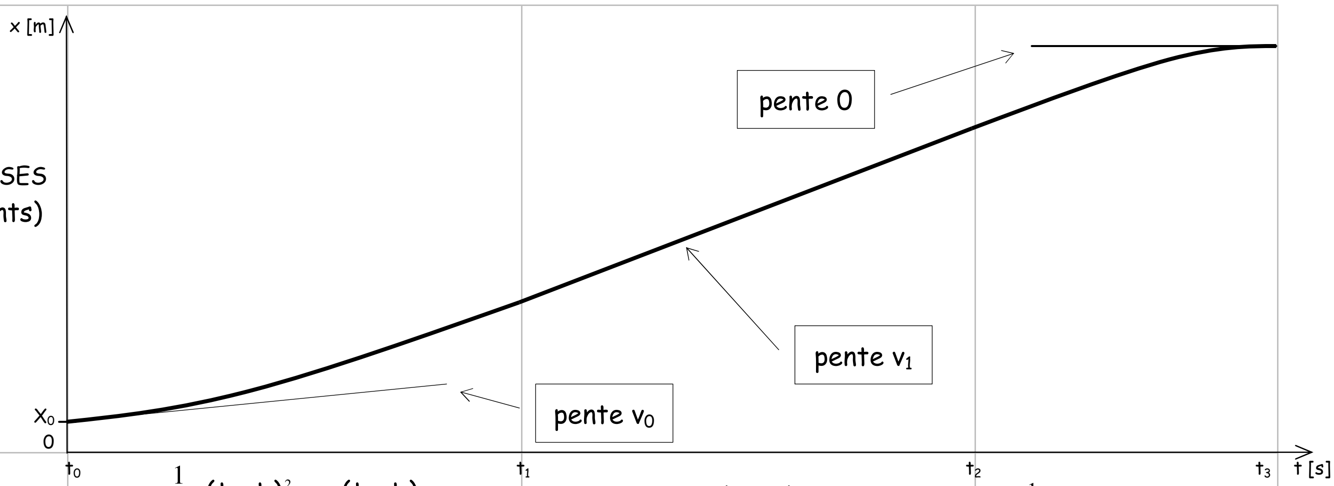
7.1. lois horaires pour le mouvement de translation

Il s'agit de déterminer les équations des grandeurs cinématiques x, V et a en fonction du temps.

Exemple d'un chariot 2 en translation rectiligne par rapport à un rail 1 :

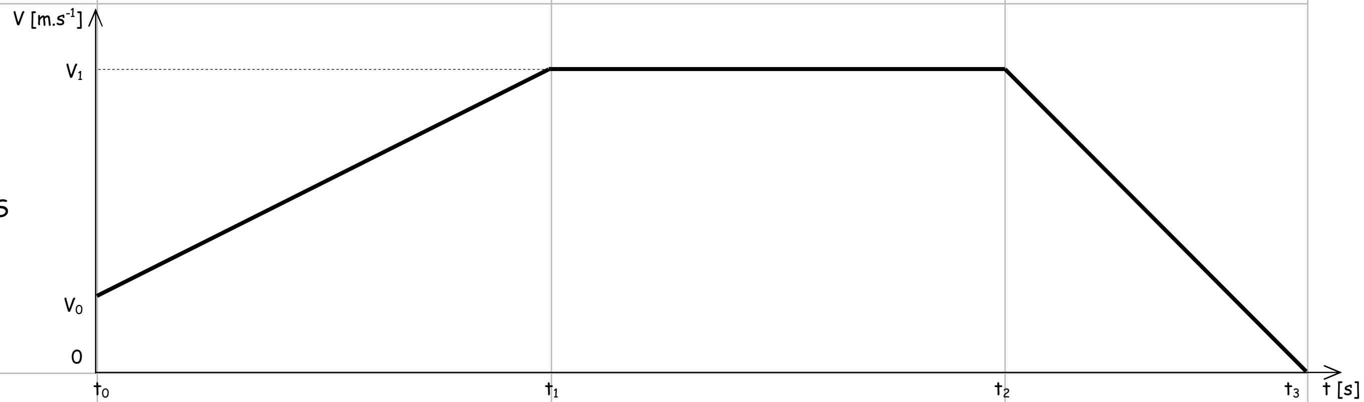


Graphe des ABSCISSES (déplacements)



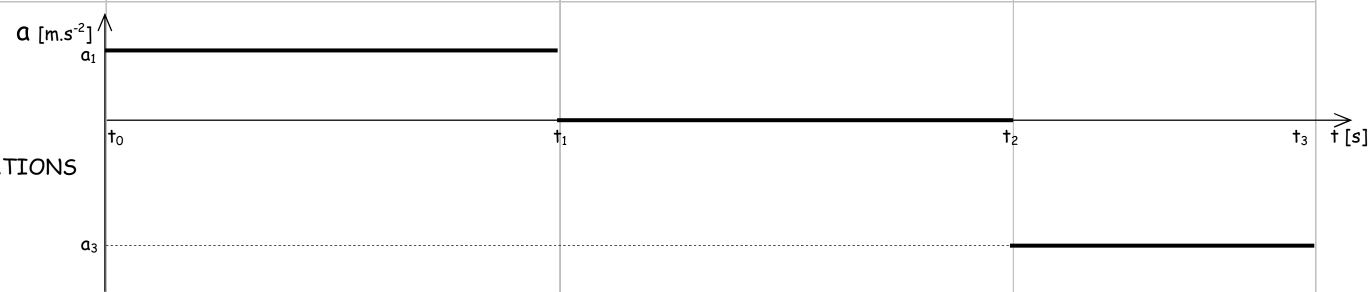
Equations des abscisses	$x=\frac{1}{2}a(t-t_i)^2+v_i(t-t_i)+x_i$	$x=v_i(t-t_i)+x_i$	$x=\frac{1}{2}a(t-t_i)^2+v_i(t-t_i)+x_i$
	$x=\frac{1}{2}a_1t^2+v_0t+x_0$	$x=v_1(t-t_1)+x_1$	$x=\frac{1}{2}a_3(t-t_2)^2+v_1(t-t_2)+x_2$

Graphe des VITESSES



Equations des vitesses	$v=a(t-t_i)+v_i$	$v=a(t-t_i)+v_i$	$v=a(t-t_i)+v_i$
	$v=a_1t+v_o$	$v=v_1$	$v=a_3(t-t_2)+v_1$

Graphe des ACCELERATIONS



Equations des accélérations	a=cste	a=0	a=cste
	$a=a_1$		$a=a_3$

On obtient finalement les abscisses, vitesses et accélérations **de n'importe quel point du solide, donc du solide**.

7.2. <u>lois horaires pour le mouvement de rotation autour d'un axe fixe</u>

Il s'agit de déterminer les équations des grandeurs cinématiques α, ω et $\frac{d\omega}{dt}$ en fonction du temps.

On obtiendra un tableau analogue à celui ci-dessus, avec les abscisses, vitesses et accélérations angulaires **de n'importe quel point du solide, donc du solide**.