LOI BINOMIALE

Rappels de 1S extraits du site de Jean-Yves Baudot : http://www.jybaudot.fr/Probas/bernoulli.html

Les *Bernoulli* sont une famille de mathématiciens du XVII$^{\text{ème}}$ et XVIIIè siècle. Huit mathématiciens de renommée internationale en furent issus, au point qu'il est souvent difficile de savoir exactement quel Bernoulli a découvert tel ou tel théorème de Bernoulli !

Cette famille est, par son grand-père, Nicolas Bernoulli, une famille de riches commerçants spécialisée dans l'importation des épices originaire d'Anvers, en Belgique. Mais, alors que le duc d'Albe fait régner de 1567 à 1573 la terreur dans les Flandres (au nom de Philippe II, roi d'Espagne), elle s'exile à Bâle, en Suisse.

Wikipedia : http://fr.wikipedia.org/wiki/Famille_Bernoulli Bibm@th : http://www.bibmath.net/bios/index.php?action=affiche&quoi=bernoulli

I Épreuve et schéma de Bernoulli

L'épreuve de Bernoulli

Une *épreuve de Bernoulli* est une expérience aléatoire qui n'a que deux issues possibles : soit oui ou non, soit pile ou face, soit succès ou échec, etc. Chacune de ces issues a une probabilité déterminée de survenir. La loi de probabilité associée à l'expérience est une *loi de Bernoulli*.

Le schéma de Bernoulli

Des épreuves de Bernoulli peuvent être répétées *n* fois à la suite. Si elles sont non seulement **identiques** entre elles mais aussi **indépendantes** les unes des autres, on parle de *schéma de Bernoulli*.

Ce dernier est représenté par un arbre des possibles et, en affectant des probabilités aux issues, par un arbre pondéré. Chaque embranchement se sépare donc en deux branches et la somme des deux probabilités correspondantes est chaque fois égale à 1.

Si la même expérience est répétée *n* fois, alors on observe une variable aléatoire X qui est égale au nombre de succès (c'est-à-dire un entier compris entre 0 et *n*).

Exemple : épreuves de Bernoulli ou pas ?

Exemple 1 : Dans un poulailler se trouvent dix poussins (jaunes pour la moitié, les autres étant noirs). On en prend un à l'aveugle puis, sans le remettre dans le poulailler, on en tire un autre. On cherche la probabilité d'avoir pris deux poussins jaunes. S'agit-il d'une épreuve de Bernoulli ?

Exemple 2 : On lance deux fois de suite un octaèdre régulier qui possède une face rouge et sept faces vertes. Décrire l'univers des possibles Ω. S'agit-il d'une épreuve de Bernoulli ? Si oui, la représenter. Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois la face rouge (on notera X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de faces rouges obtenues) ?

II Loi binomiale

C'est une loi de probabilité qui modélise une répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes les unes des autres.

Supposons que l'on réitère *n* fois la même épreuve de Bernoulli de façon indépendante, donc avec chaque fois cette même probabilité de succès *p*. Alors nous sommes en présence d'un schéma de Bernoulli et la probabilité d'obtenir *k* succès suit une **loi binomiale**.

Ces deux paramètres *n* et *p* suffisent pour caractériser une loi de probabilité binomiale.
La formule déterminant la probabilité que la variable aléatoire X prenne la valeur *k* est la suivante :

$$P(X=k)=\binom{n}{p}\times p^k\times(1-p)^{n-k}$$

Le nombre $\binom{n}{k}$ est appelé ***coefficient binomial***. C'est le nombre de chemins de l'arbre réalisant k succès lors des n répétitions.

L'espérance de X est $\mathrm{E}(\mathrm{X})=n\times p$

Exemple : Une machine-outil produit 1,2 % de pièces défectueuses. On contrôle quarante pièces prises au hasard (sachant qu'après inspection une pièce est remise avec les autres et peut éventuellement être revérifiée). Quelle est la probabilité de contrôler deux pièces défectueuses ?

Un arbre de probabilité permettrait de retrouver ce résultat mais, avec 40 tirages... on l'oublie !

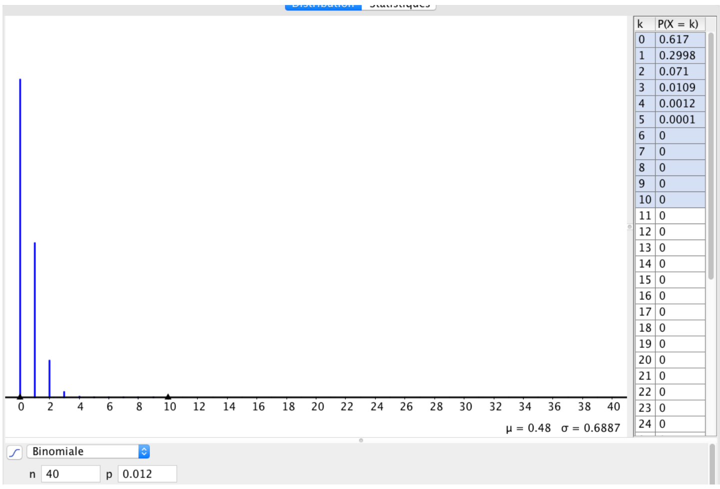
L'expérience aléatoire « Prendre une pièce au hasard et tester si elle est défectueuse » est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p=0,012$.

On répète cette expérience 40 fois de façon indépendante et identique (chaque pièce testée est remise dans le lot).

Soit X la variable aléatoire qui détermine le nombre de pièces défectueuses.
X prend les valeurs {0;1 ;... ; 40} et suit une loi binomiale de paramètres $n=40$ et $p=0,012$.

On a donc $P(X=2)=\binom{40}{2}\times 0{,}012^2\times(1-0{,}012)^{40-2}=\binom{40}{2}\times 0{,}012^2\times 0{,}988^{38}\approx 0{,}071$

Avec le tableur de *GeoGebra* :



L'espérance est $0,012\times 40$ soit 0,48

En réalisant un très grand nombre de fois l'expérience, la moyenne du nombre de succès se rapproche de 0,48.

On peut « espérer » obtenir 0,48 pièces défectueuses.

Votre calculatrice permet de déterminer les coefficients binomiaux et les probabilités cherchées (voir fiches ou manuel page 417). Un lien : http://mathematiques.ac-bordeaux.fr/lycee2010/calculatrices/loi_binomiale_et_calculatrice.pdf

Un autre exemple pour tout reprendre sur le site d'Yvan Monka
https://www.maths-et-tiques.fr/telech/BinomialeGM.pdf

Prolongements : L'emploi de la loi binomiale n'est pas toujours très commode ; aussi peut-elle être approximée par d'autres lois de probabilité sous certaines conditions.
- Si *n* est grand, c'est-à-dire au moins une trentaine d'observations, et si *p* n'est pas trop proche de 0 ou de 1, la loi binomiale converge vers une **loi normale** d'espérance $n\,p$ (chapitre à venir). C'est une application du « théorème central limite ».
- Si *p* est trop petit, l'approximation est réalisable par une loi de Poisson (*np* devient alors le paramètre λ de cette loi) que les étudiants en PACES rencontreront).

III Coefficient binomiaux

- Par convention $\binom{0}{0}=1$.
- Pour tout entier $n\geqslant 0$, $\binom{n}{n}=1$ il y a *un seul* chemin correspondant à *n* succès lors de *n* répétitions ; c'est SS...S
- Pour tout entier $n\geqslant 0$, $\binom{n}{0}=1$ il y a *un seul* chemin correspondant à 0 succès lors de *n* répétitions ; c'est $\overline{S}\ \overline{S}\ ...\ \overline{S}$
- Pour tout entier $n\geqslant 0$, $\binom{n}{1}=n$ il y a *n* chemins correspondant à 1 succès lors de *n* répétitions : $S_1\overline{S_2}\ldots\overline{S_n}$; $\overline{S_1}S_2\overline{S_3}\ldots\overline{S_n}$ … $\overline{S_1}\,\overline{S_2}\ldots\overline{S_{n-1}}S_n$

- Pour tous entiers n et k tels que $0 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Si il y a k succès lors de n répétitions, alors il y a $n-k$ échecs.

- Pour tous entiers n et k tels que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Sur l'arbre représentant un schéma de Bernoulli pour n répétitions, les chemins qui conduisent à k succès sont :

- ceux qui conduisent à $k-1$ succès lors des $n-1$ premières répétitions et 1 succès lors de la n-ième répétition. Il y en a $\binom{n-1}{k-1}$;
- ceux qui conduisent à k succès lors des $n-1$ premières répétitions et 1 échec lors de la n-ième répétition. Il y en a $\binom{n-1}{k}$.

Triangle de Pascal

Pascal (1623-1662), mathématicien et philosophe français du XVII$^{\text{ème}}$ siècle)

On construit le tableau ci-dessous, $\binom{n}{k}$ est à l'intersection de la ligne n et de la colonne k .

Par convention $\binom{0}{0}=1$; $\binom{n}{n}=1$ donc on complète la diagonale ; $\binom{n}{0}=1$ d'où la colonne n°1.

On sait que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ d'où les calculs des $\binom{n}{k}$.

p =	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
n =*0*	1												
1	1	1											
2	1	2	1										
3	1	3	3	1									
4	1	4	6	4	1								
5	1	5	10	10	5	1							
6	1	6	15	20	15	6	1						
7	1	7	21	35	35	21	7	1					
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1				
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1			
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1		
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Formule du binôme : $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$

À vérifier pour $n=2$ et $n=3$ ...