

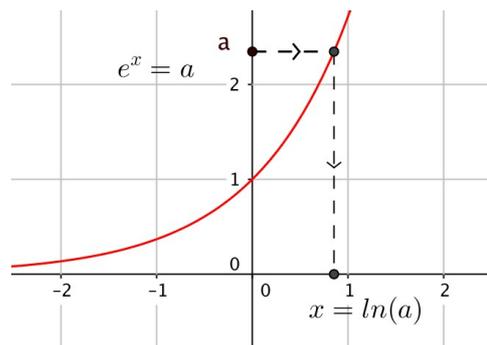
Fonctions (III) Logarithme Népérien

Compétences	Exercices corrigés
Connaître le sens de variation, les limites et la représentation graphique de la fonction logarithme népérien.	Savoir-faire 2 p 137
Savoir utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture	Savoir-faire 3 et 4 p 139 ; 4p 139
Savoir résoudre des équations ou inéquations avec \ln Savoir résoudre des équations du type $a^n=b$, $a>0$ et $b>0$	Savoir-faire 1 p 137 ; 48 p 146 Application 1 et 2
Connaître et exploiter les limites liées à la fonction \ln	Savoir-faire 5 et 6 p141
Savoir étudier une fonction de la forme $\ln(u)$	Savoir-faire 7 p 143 ; 96 p 150

I - La fonction logarithme népérien

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} , à valeurs dans $]0; +\infty[$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel a de $]0; +\infty[$, l'équation $e^x=a$ admet une unique solution dans \mathbb{R} , on la note $\ln(a)$.



Définition : On appelle **logarithme népérien d'un réel strictement positif a** , l'unique solution de l'équation $e^x=a$ que l'on note $\ln a$.

La **fonction \ln** est définie sur $]0; +\infty[$. Elle associe à tout réel x strictement positif le nombre y , noté $\ln(x)$, dont l'exponentielle est x .

Conséquences

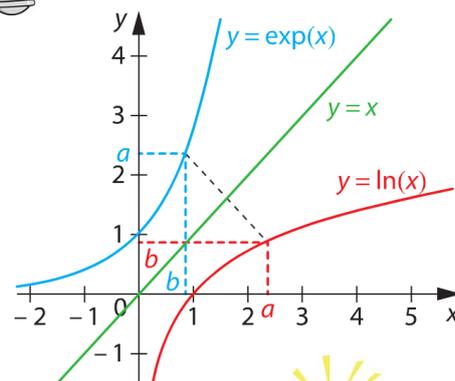
1. Pour tout réel $x>0$, $e^{\ln(x)}=x$ par définition.
2. Pour tout x , $\ln(e^x)=x$
3. $\ln(1)=0$ et $\ln(e)=1$

Théorème : Pour tout réel a strictement positif et pour tout nombre b , $\ln(a)=b \Leftrightarrow a=e^b$

Preuve : Si $\ln(a)=b$ alors $e^{\ln a}=e^b=a$.

Réciproquement, si $a=e^b$ alors $\ln(a)=\ln(e^b)=b$

Conséquences : les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$. On dit que les fonctions exponentielle et logarithme népérien sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.



Théorème : La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Preuve : Soient u et v deux réels strictement positifs tels que $u < v$. Or $u < v$ s'écrit $e^{\ln(u)} < e^{\ln(v)}$. La fonction exponentielle est croissante sur \mathbb{R} donc nécessairement $\ln(u) < \ln(v)$.

Conséquences : Pour tous réels a et b strictement positifs : $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$
 et $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$

Exemple : Résoudre l'équation $\ln(x-1) = 0$

Cette équation n'a de sens que pour $x-1 > 0$ c'est-à-dire pour $x > 1$

$\forall x > 1, \ln(x-1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x-1) = \ln(1)$ car l'antécédent de 0 par \ln est 1.

$\forall x > 1, \ln(x-1) = 0 \Leftrightarrow x-1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$

L'équation admet une unique solution $x = 2$.

ln n'est définie que pour des réels strictement positifs



Exercice : a) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\ln(x-3) = \ln(9-x)$.

b) Résoudre l'inéquation $\ln(3-x) < \ln(x+1)$.

Ex 6 à 9 p 144 - 14 ; 15 p 144 - 39 à 47 p 146 - 69 à 74 p 148

II - Propriété de la fonction logarithme népérien

Introduction : extrait du manuel *Transmaths* (édition 2012)

Construction d'une table de logarithme, approche des propriétés de \ln

1. Relation fondamentale dite aussi relation fonctionnelle

Théorème : Pour tous réels a et b strictement positifs, on a : $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$
 Autrement dit, la fonction \ln transforme les produits en somme. *Preuve*



Exemple : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x + \ln(2 + e^{-3x})$.

Montrer que $f(x) = \ln(2e^x + e^{-2x})$

2. Conséquences de la propriété fondamentale

Théorème : Pour tous réels a et b strictement positifs, on a :

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \text{ et } \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b) \quad \textit{Preuve}$$



Théorème : Pour tous réels a et b strictement positif et tout entier relatif n , on a : $\ln(a^n) = n \times \ln(a)$

Pour tout réel a strictement positif, $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \times \ln(a)$ *Preuves*

Théorème : Pour tous réels a et b strictement positif et tout entier relatif n , on a : $\ln(a^n) = n \times \ln(a)$

Preuve par récurrence (manuel page 138).

Théorème : Pour tout réel a strictement positif, $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \times \ln(a)$ *Preuve*

Exemples : a) Exprimer $\ln(4^{-3}) + 5 \ln(2)$ en fonction de $\ln(2)$.

b) Exprimer $\ln(\sqrt{3}) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{5}{3}\right)$ en fonction de $\ln(5)$.

Application 1 : Déterminer le plus petit entier n tel que $0,7^n \leq 10^{-2}$.

$$0,7^n \leq 10^{-2} \Leftrightarrow \ln(0,7^n) \leq \ln(0,01) \Leftrightarrow n \times \ln(0,7) \leq \ln(0,01) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,7)}$$

$$\textcircled{c} \quad n \geq 12,9 \text{ donc } n = 13$$

On divise par $\ln(0,7)$...
 nombre négatif.



Application 2 : Un enquêteur effectue un sondage par téléphone. La probabilité que le correspondant décroche et accepte de répondre à l'enquête est de 0,2. Combien d'appels l'enquêteur doit-il passer au minimum pour que la probabilité qu'au moins un correspondant réponde au sondage soit supérieure à 0,999 ?

Ex 20 à 27 p 145 - 65 et 66 p 147

III - Étude de la fonction logarithme népérien

1. Continuité et dérivabilité



Théorème (admis) : La fonction logarithme népérien est continue sur $]0; +\infty[$.

Théorème : La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

Preuve (manuel page 136)

Exercice 1 : Dériver la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}x^2 + 1$.

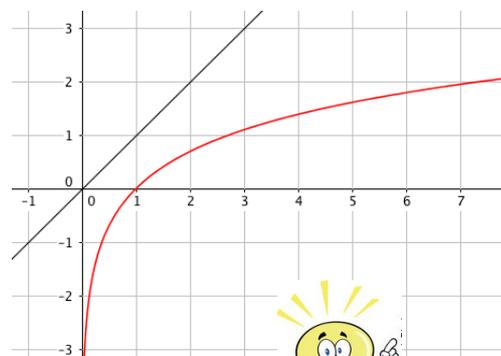
Exercice 2 : Dériver la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$.

Ex 16 à 19 p 145 ; 55 à 64 p 147

2. Limites aux bornes et courbe représentative de la fonction ln

Propriété : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x) = -\infty$

Preuves page 140



La fonction $x \rightarrow \ln(x)$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

3. Limites à connaître

Théorème (Preuves page 140)

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ b) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x) = 0$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

Exercice : Déterminer les limites a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(x))$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x-1}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x^2}$

Exercice : Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (\ln(x))^3 - 3 \ln(x)$.

- Déterminer les limites aux bornes de son intervalle de définition. Que peut-on en déduire ?
- Montrer que $f'(x) = \frac{3(\ln(x)-1)(\ln(x)+1)}{x}$ puis dresser le tableau de variation de f .
- Déterminer l'équation de la tangente T au point d'abscisse 1.
- Résoudre $f(x) = 0$ puis construire C_f et T dans un repère.

Ex28 à 34 p 145 - 81 à 90 p 149

▶ NEPER (ou NAPIER) John, écossais, 1550-1617



Baron de Merchiston, théologien protestant. Avec l'invention de ses "réglettes", permettant d'effectuer les quatre opérations élémentaires, il est à l'origine des premières machines à calculer dont il expose le fonctionnement dans un traité (*Rabdologiae*, 1617) en introduisant, au niveau des notations, la notation décimale actuelle des nombres décimaux, au détriment de la notation fractionnaire :

$$32,578 \text{ plutôt que } 32 \frac{578}{1000}$$

→ Le traité de Neper eut pour nom précis *Rabdologiae seu numerationis per virgula libri duo* signifiant *Deux livres sur la rabdologie* (du grec *rhabdos* = baguette, *réglette* et *logos* = science du calcul) et sur la numération avec virgule.

IV. Fonctions de la forme $\ln(u)$

Théorème : Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I .

La fonction $x \rightarrow \ln(u(x))$ est dérivable sur I . Sa dérivée est la fonction $x \rightarrow \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $]0; 2[$ par $f(x) = \ln(2x - x^2)$. Déterminer $f'(x)$.

$$u(x) = 2x - x^2 \text{ et } u'(x) = 2 - 2x \text{ d'où } f'(x) = \frac{2 - 2x}{2x - x^2}.$$

Théorème : Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I .

Les fonctions $x \rightarrow u(x)$ et $x \rightarrow \ln(u(x))$ ont le même sens de variation. *Preuve*

Exemple : On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{1-x}\right)$

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- Déterminer le sens de variation de la fonction f .

Ex 35 à 38 p 145 - 91 à 95 p 149 - 97 p 150

V. Logarithme décimal

Merveilleux logarithmes de Mickaël Launay : <https://www.youtube.com/watch?v=rWf17Pw8YVE>

Définition : on appelle fonction logarithme décimal la fonction notée **log** définie sur $]0; +\infty[$ par

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}.$$



Propriétés : $\log(10) = 1$ $\log(1) = 0$ $\log(10^n) = n$

Pour tous réels a et b strictement positifs, on a :

$$\log(a \times b) = \log(a) + \log(b) ; \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b) \text{ et } \log(a^n) = n \times \log(a)$$

Application 3 : échelle logarithmique (voir activité)

Application 4 : Savoir-faire 8 page 143 ; 98 p 150

Le logarithme népérien, également dit naturel, voire hyperbolique depuis Euler, autrefois noté Log , est noté aujourd'hui \ln .

Il vérifie pour tout $x > 0$, $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$: l'aire sous la courbe de l'hyperbole de 1 à e vaut... 1 !

Le nombre e dit nombre d'Euler est un nombre réel tel que $e = 2,7182818284 5904523536\dots$

$$e \text{ est irrationnel, transcendant et } e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Un peu d'histoire des maths :

- sur le site d'Yvan Monka : <http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/histoire-des-maths/nombres/le-nombre-e>
- sur un site québécois : http://www.math.uqam.ca/~boileau/Explorations2010/Nombre_e/siteHistoire.html
- Sur Chronomaths : <http://serge.mehl.free.fr/chrono/Neper.html> pour en savoir plus sur Neper